

Damian Sołtysiak

STABILNOŚĆ GOSPODARKI

W MONETARNYM
MODELU WZROSTU TYPU
KEYNESA-METZLERA-GOODWINA

$$\frac{d}{dy^p} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{- \left(\tau \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta} + \tau \frac{\bar{y}^p}{\bar{y}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \bar{U} \bar{U} + \mu \frac{\partial \bar{m}}{\partial \bar{y}} \right) \left(n - \bar{\rho} + \xi + \tau (\bar{\rho} + \bar{\pi}) \right) + \left(g - \tau \bar{\rho} - \tau \frac{\bar{U} \bar{y}^p}{\bar{y}} - \bar{\mu} \bar{m} \right) \left(1 - \tau \right) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta}}{\left(n - \bar{\rho} + \xi + \tau (\bar{\rho} + \bar{\pi}) \right)^2}$$
$$\frac{d}{du} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{- \left(\tau \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial u} + \tau \frac{\bar{y}^p}{\bar{y}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial u} + \bar{y}^p \bar{U} + \mu \frac{\partial \bar{m}}{\partial u} \right) \left(n - \bar{\rho} + \xi + \tau (\bar{\rho} + \bar{\pi}) \right) + \left(g - \tau \bar{\rho} - \tau \frac{\bar{U} \bar{y}^p}{\bar{y}} - \bar{\mu} \bar{m} \right) \left(1 - \tau \right) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial u}}{\left(n - \bar{\rho} + \xi + \tau (\bar{\rho} + \bar{\pi}) \right)^2}$$
$$\frac{d}{dy^p} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{- \left(\tau \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta} + \tau \frac{\bar{y}^p}{\bar{y}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \bar{U} \bar{U} + \mu \frac{\partial \bar{m}}{\partial \bar{y}} \right) \left(n - \bar{\rho} + \xi + \tau (\bar{\rho} + \bar{\pi}) \right) + \left(g - \tau \bar{\rho} - \tau \frac{\bar{U} \bar{y}^p}{\bar{y}} - \bar{\mu} \bar{m} \right) \left(1 - \tau \right) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta}}{\left(n - \bar{\rho} + \xi + \tau (\bar{\rho} + \bar{\pi}) \right)^2}$$

STABILNOŚĆ GOSPODARKI

W MONETARNYM
MODELU WZROSTU TYPU
KEYNESA-METZLERA-GOODWINA

Damian Sołtysiak

STABILNOŚĆ GOSPODARKI

W MONETARNYM
MODELU WZROSTU TYPU
KEYNESA-METZLERA-GOODWINA

WYDAWNICTWO UEP



UNIWERSYTET
EKONOMICZNY
W POZNANIU

Poznań 2025

Komitety Redakcyjny

Marcin Anholcer (przewodniczący), Monika Banaszewska, Barbara Borusiak, Szymon Cyfert, Bazyli Czyżewski, Aleksandra Gawel (wiceprzewodnicząca), Piotr Lis, Krzysztof Malaga, Marzena Remlein, Magdalena Stefańska, Eliza Szybowicz (sekretarz)

Recenzent

Tomasz Tokarski

Projekt okładki i stron działowych

Boobry Group Marta Brzostowicz

Redakcja i korekta

Magdalena Kraszewska

Autor

 *Damian Soltysiak*

Sugerowane cytowanie: Soltysiak, D. (2025). *Stabilność gospodarki w monetarnym modelu wzrostu typu Keynesa–Metzlera–Goodwina*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.

<https://doi.org/10.18559/978-83-8211-262-7>

ISBN 978-83-8211-261-0

eISBN 978-83-8211-262-7

<https://doi.org/10.18559/978-83-8211-262-7>



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego



**Doskonała
Nauka II**

Projekt dofinansowany ze środków budżetu państwa, przyznanych przez Ministra Nauki w ramach Programu Doskonała Nauka II.

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Poznań 2025



Ta książka jest udostępniana na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0 Międzynarodowe

WYDAWNICTWO UNIwersytetu Ekonomicznego w POZNANIU

ul. Powstańców Wielkopolskich 16, 61-895 Poznań

tel. 61 854 31 54, 61 854 31 55

<https://wydawnictwo.ue.poznan.pl>, e-mail: wydawnictwo@ue.poznan.pl

adres do korespondencji: al. Niepodległości 10, 61-875 Poznań

Skład: Wydawnictwo Naukowe FNCE

Druk: Perfekt – Gaul i wspólnicy sp. j.

ul. Skórzewska 63, 60-185 Skórzewo

Spis treści

Wstęp	9
Rozdział 1. Model Keynesa–Metzlera–Goodwina z egzogeniczną podażą pieniądza	23
1.1. Wyjściowa postać modelu	25
1.1.1. Popyt konsumpcyjny, płace i ceny	25
1.1.2. Popyt inwestycyjny i dynamika majątku trwałego	27
1.1.3. Deficyt budżetowy i dynamika długu publicznego	29
1.1.4. Rynek pieniądza.....	31
1.1.5. Determinanty produkcji i dynamika zapasów.....	32
1.1.6. Ograniczenia produkcji przez zasoby pracy i majątku trwałego	33
1.1.7. Równość inwestycji i oszczędności.....	34
1.1.8. Kompletny układ równań modelu	37
1.1.9. Sprzężenia zwrotne.....	38
1.2. Postać intensywna modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza	50
1.2.1. Sprowadzenie modelu do postaci intensywnej	50
1.2.2. Stan stacjonarny modelu w postaci intensywnej	55
1.2.3. Równania opisujące wartości zmiennych modelu intensywnego w stanie stacjonarnym	59
1.2.4. Analiza wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany parametrów modelu.....	61
Podsumowanie.....	75
Rozdział 2. Model typu Keynesa–Metzlera–Goodwina z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym	77
2.1. Reguła Taylora, kredyt inwestycyjny i emisja obligacji	79
2.1.1. Reguła Taylora kształtowania stopy procentowej.....	80
2.1.2. Zadłużenie sektora prywatnego i publicznego.....	82
2.2. Model KMG i jego stan stacjonarny.....	85
2.2.1. Kompletny układ równań modelu KMG z kredytem inwestycyjnym...	86
2.2.2. Równość inwestycji i oszczędności.....	87
2.2.3. Model KMG w postaci intensywnej	90

2.2.4. Stan stacjonarny modelu KMG	96
2.2.5. Analiza wrażliwości stanu stacjonarnego	102
Podsumowanie	105
Rozdział 3. Stabilność stanów stacjonarnych modeli KMG i KMG	107
3.1. Twierdzenie o stabilności równowagi w modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza	109
3.2. Dowód twierdzenia o stabilności modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza	113
3.2.1. Ogólna charakterystyka dowodu	113
3.2.2. Macierz Jacobiego modelu	115
3.2.3. Redukcja stopni wielomianów	126
3.2.4. Przywracanie dodatnich wartości parametrów reakcji	129
3.3. Twierdzenie o stabilności modelu KMG z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym	135
3.4. Dowód twierdzenia o stabilności modelu KMG z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym	139
3.4.1. Ogólna charakterystyka dowodu	139
3.4.2. Macierz Jacobiego modelu	140
3.4.3. Redukcja stopni wielomianów	144
3.4.4. Przywracanie dodatnich wartości parametrów reakcji	149
Podsumowanie	152
Rozdział 4. Eksperymenty symulacyjne	155
4.1. Kalibracja modelu na podstawie danych o polskiej gospodarce	159
4.1.1. Modyfikacja modelu KMG na potrzeby eksperymentów symulacyjnych	159
4.1.2. Zmodyfikowany model KMG w postaci intensywnej	163
4.1.3. Adaptacja podstawowych równań zmodyfikowanego modelu	165
4.1.4. Kalibracja parametrów reakcji za pomocą programu Solver	173
4.1.5. Podsumowanie	178
4.2. Eksperymenty symulacyjne modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza	179
4.2.1. Procedury obliczeniowe	179
4.2.2. Stany stacjonarne polskiej gospodarki przy różnych zestawach wartości parametrów reakcji	182
4.2.3. Scenariusze wzrostu polskiej gospodarki przy różnych zestawach wartości parametrów reakcji	187
4.2.4. Analiza wpływu polityki fiskalnej i pieniężnej na gospodarkę	197
4.2.5. Podsumowanie	212
4.3. Eksperymenty symulacyjne modelu KMG z regułą Taylora	213
4.3.1. Uwagi ogólne	213

4.3.2. Porównanie modeli KMG i KMGT na podstawie symulacji komputerowych.....	218
4.3.3. Analiza wpływu polityki fiskalnej i pieniężnej na gospodarkę opisaną równaniami modelu KMGT.....	222
4.3.4. Podsumowanie.....	226
4.4. Symulacje wpływu szoków zewnętrznych na polską gospodarkę w świetle modelu KMGT.....	226
4.4.1. Charakterystyka szoków zewnętrznych.....	226
4.4.2. Procedury obliczeniowe.....	232
4.4.3. Analiza wpływu szoków zewnętrznych.....	240
4.4.4. Podsumowanie.....	244
 Zakończenie	 245
 Bibliografia	 249
 Spis tabel	 255
 Spis rysunków	 256
 The stability of the Keynes–Metzler–Goodwin monetary growth model (Summary)	 259

Wstęp

Zdecydowaną większość teoretycznych modeli wzrostu gospodarczego stanowią modele opisujące procesy wzrostu zachodzące w realnej sferze gospodarki w długim horyzoncie czasowym. Podstawowymi zmiennymi takich modeli są kapitał (majątek trwały), produkcja, zatrudnienie, kapitał ludzki, inwestycje, konsumpcja i postęp technologiczny. W wypadku modeli wzrostu gospodarki zdecentralizowanej (modeli dynamicznej równowagi ogólnej) dodatkowymi zmiennymi są wynagrodzenia (z pracy i kapitału). Jeżeli w modelach uwzględnia się także sektor publiczny (rządowy), to wśród zmiennych pojawiają się ponadto wydatki rządowe, podatki, obligacje i dług publiczny. Powyższa lista zmiennych jest wystarczająca do sformułowania zdecydowanej większości modeli wzrostu. Przykłady takich modeli można znaleźć między innymi w obszernych monografiach poświęconych teorii wzrostu gospodarczego takich autorów jak Barro i Sala-i-Martin (1995), Acemoglu (2009) oraz Novales i in. (2009).

Odrębną klasą modeli wzrostu gospodarczego są monetarne modele wzrostu umożliwiające badanie wpływu polityki pieniężnej na wzrost gospodarczy. W tradycyjnych monetarnych modelach wzrostu polityka pieniężna znajduje odzwierciedlenie w zmianach podaży pieniądza kontrolowanych przez bank centralny. Przyjmuje się, że bank centralny dąży do utrzymania określonego (zwykle wykładniczego) wzrostu podaży pieniądza (ilości pieniądza w obiegu) poprzez odpowiednie kształtowanie wysokości stopy procentowej, która wraz z wielkością produkcji determinuje popyt na pieniądz. W nowszych monetarnych modelach wzrostu obserwuje się tendencję do pomijania podaży pieniądza i skupiania uwagi bezpośrednio na stopie procentowej jako głównym instrumencie banku centralnego służącym z jednej strony do realizacji jego celu inflacyjnego, a z drugiej do podtrzymywania wzrostu gospodarczego. Taki sposób modelowania polityki pieniężnej jest ujmowany w różnych wersjach tzw. równania Taylora opisującego czynniki wpływające na zmienność stopy procentowej (Baranowski, 2008; Bullard i Mityra, 2002; McCandless, 2008; Taylor, 1993, 1999).

Podobnie jak w całej teorii wzrostu gospodarczego, w przypadku monetarnych modeli wzrostu na pierwszy plan wysuwają się zwykle dwa zagadnienia. Jedno dotyczy tego, czy gospodarka opisana danym modelem jest zdolna do trwałego, równomiernego wzrostu. Jest to pytanie o istnienie ścieżki równomiernego wzrostu,

a ponieważ wzrost równomierny to wzrost, w którym proporcje między zmiennymi (struktura gospodarki) pozostają niezmiennie, pytanie to sprowadza się do pytania o istnienie takich proporcji między zmiennymi, które ów równomierny wzrost umożliwiają. W terminologii używanej w teorii wzrostu gospodarczego proporcje te definiują stan stacjonarny gospodarki. W wypadku monetarnych modeli wzrostu w kontekście stanu stacjonarnego pojawia się pytanie, czy stan ten zależy od prowadzonej polityki pieniężnej, czy też pozostaje niezależny, co się wiąże z problemem neutralności pieniądza. Drugie zagadnienie badane w teorii wzrostu gospodarczego dotyczy pytania o to, czy gospodarka, która w stanie początkowym nie znajduje się na ścieżce równomiernego wzrostu (a tym samym nie znajduje się w stanie stacjonarnym), z upływem czasu dąży do tej ścieżki, osiągając proporcje zbliżone do tych, które charakteryzują stan stacjonarny. Jeżeli zbieżność taka występuje, mówimy o asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego. W zależności od rozpatrywanego modelu może się on cechować kompletnym brakiem stabilności, stabilnością globalną lub stabilnością lokalną. O stabilności globalnej mówimy, gdy zbieżność do stanu stacjonarnego nie zależy od początkowego stanu gospodarki, a o stabilności lokalnej, gdy warunkiem zbieżności do stanu stacjonarnego jest odpowiednio mała odległość stanu początkowego (w kategoriach proporcji między zmiennymi) od stanu stacjonarnego.

Stabilność gospodarki może być wynikiem procesów adaptacyjnych (opisywanych równaniami różniczkowymi lub różnicowymi), w których wartości zmiennych z okresu na okres dostosowują się do różnego typu nierównowag, może też wynikać z własności rozwiązań zadań optymalizacji dynamicznej, formułowanych w celu znajdowania długookresowych, optymalnych scenariuszy wzrostu gospodarczego. W każdym wypadku stabilność nie jest bezwarunkową cechą gospodarki. Matematyczne twierdzenia o stabilności różnych modeli wzrostu zawsze opierają się na licznych założeniach, bez których dowody stabilności byłyby niemożliwe. W wypadku monetarnych modeli wzrostu wśród założeń gwarantujących stabilność gospodarki interesujące są w szczególności założenia dotyczące wzrostu podaży pieniądza czy też reguł kształtowania stopy procentowej. Założenia tego rodzaju pozwalają na formułowanie wniosków dotyczących tego, czy i jak polityka pieniężna może wpływać na stan stacjonarny oraz na stabilność lub niestabilność gospodarki.

Prekursorem wprowadzenia pieniądza do modeli wzrostu był amerykański ekonomista James Tobin, który zaprezentował model, za pomocą którego analizował wpływ tempa wzrostu podaży pieniądza na wzrost gospodarczy (Tobin, 1955). Głównym problemem podjętym przez Tobina była próba sformułowania takiego monetarnego modelu wzrostu, który byłby wolny od tzw. problemu ostrza noża (*knife edge problem*), znanego z modeli wzrostu Harroda (1939, 1942), Domara (1946) oraz Kaldora (1971).

Problem ten jest związany z kompletną niestabilnością gospodarki. Polega na tym, że każde jej wytrącenie ze ścieżki równomiernego wzrostu skutkuje pogłębia-

jącą się nierównowagą bez szans powrotu na tę ścieżkę (więcej na temat problemu ostrza noża piszą: Filipowicz i in. (2016), Piętak (2017) oraz Tokarski (2005)). W pracy z 1955 roku Tobinowi nie udało się jasno i jednoznacznie rozstrzygnąć kwestii stabilności stanu stacjonarnego w analizowanym modelu. Dopiero 10 lat później zaprezentował on monetarny neoklasyczny model wzrostu będący rozszerzeniem modelu Solowa-Swana (Solow, 1956; Swan, 1956) o czynniki monetarne (Tobin, 1965)¹, na podstawie którego sformułował wniosek, że odpowiednia polityka pieniężna może być rozwiązaniem problemu ostrza noża² (zob. także Dimand (2014) oraz Dimand i Durlauf (2009)). Innym ciekawym wnioskiem sformulowanym przez Tobina było to, że szybszy wzrost podaży pieniądza wiąże się z wyższym poziomem kapitału rzeczowego oraz wyższą produkcją na osobę w stanie stacjonarnym, co jest spowodowane tym, że wyższy poziom inflacji skłania oszczędzających do zmiany struktury portfela aktywów na korzyść kapitału rzeczowego. To z kolei oznacza, że w stanie stacjonarnym modelu Tobina pieniądź nie jest neutralny. Inna z tez sformułowanych przez Tobina głosi, że wzrost inflacji może mieć pozytywny wpływ na inwestycje, ponieważ w warunkach inflacji wartość rynkowa przedsiębiorstw rośnie szybciej niż poziom cen (tzw. efekt Tobina). Temat ten poruszają Okun (1971), a także Fischer i Modigliani (1978), którzy opisują negatywny wpływ inflacji na wzrost gospodarczy.

Wnioski sformułowane przez Tobina zostały uznane za kontrowersyjne i skłoniły wielu autorów do zmodyfikowania jego modelu w celu kontynuowania badań nad wpływem pieniądza i inflacji na wzrost gospodarczy (Johnson, 1966; Levhari i Patinkin, 1968; Sidrauski, 1967a, 1967b).

Levhari i Patinkin (1968) wykazali, że jeśli w modelu Tobina stopa oszczędności jest funkcją zależną od stóp zwrotu z aktywów zawartych w portfelu sektora prywatnego (kapitału rzeczowego i pieniądza), to efekt Tobina może nie wystąpić. Dornbusch i Frenkel (1973), wprowadzając do modelu Tobina funkcję konsumpcji zależną od inflacji i rzeczywistej wartości majątku *per capita*, udowodnili, że w stanie stacjonarnym wzrost inflacji zmniejsza zainteresowanie inwestycjami w kapitał rzeczowy, co jest efektem przeciwnym do efektu Tobina.

Istotne zastrzeżenie do modelu Tobina dotyczyło niestabilnego charakteru stanu stacjonarnego, który jest niestabilnym punktem siodłowym³. W praktyce oznacza to, że nawet niewielkie odchylenia od równowagi mogą prowadzić do znacznych fluktuacji i dalszych odchylen od równowagi (Nagatani, 1970; Sidrauski, 1967b).

¹ W literaturze najczęściej pomijana jest praca Tobina z 1955 roku, a cytowana dopiero ta z 1965 roku (Orphanides i Solow, 1990; Sijben, 1977).

² Jak wykazano w kolejnych badaniach nad modelem Tobina, wniosek ten był błędny (Nagatani, 1970).

³ W kontekście teorii równań różniczkowych, punkt siodłowy to punkt równowagi, w którym pewne trajektorie są przyciągane do punktu, podczas gdy inne są od niego odpychane. Różnica między punktem siodłowym stabilnym a niestabilnym jest związana z charakterem tych trajektorii.

W konsekwencji okazało się, że Tobin w swojej pracy z 1965 roku nie rozwiązał problemu ostrza noża. Jedno z rozwiązań tego problemu zaproponował Sidrauski, który w swojej pracy z 1967 roku (Sidrauski, 1967b) założenie zastosowane w oryginalnym modelu Tobina, że inflacja w każdym momencie jest równa inflacji oczekiwanej na dany moment (założenie perfekcyjnych przewidywań), zastąpił hipotezą adaptacyjnych oczekiwań (Cagan, 1956), uzyskując w ten sposób stabilność stanu stacjonarnego.

Model Tobina był krytykowany także za to, że pieniądź był w nim traktowany wyłącznie jako środek wymiany, a nie jako forma oszczędności, co nie było przekonującym wyjaśnieniem, dlaczego gospodarstwa domowe utrzymują część swojego majątku w postaci pieniądza, skoro nie przynosi to żadnych bezpośrednich dochodów. Przekonujące wyjaśnienie tego problemu przedstawił dopiero w przełomowej pracy Sidrauski (1967b), który wprowadził pieniądź do modelu optymalnego wzrostu gospodarczego Ramseya-Cassa-Koopmansa (w skrócie RCK), przyjmując, że argumentem międzyokresowej funkcji użyteczności oprócz konsumpcji *per capita* jest zasób realnego pieniądza *per capita* posiadanego przez gospodarstwa domowe. Pozwoliło to na pokazanie roli pieniądza nie tylko jako środka wymiany, ale także jako formy oszczędności gromadzonych w celu sfinansowania konsumpcji w przyszłości, co uznano za bliższe rzeczywistości, gdyż faktycznie ludzie gromadzą pieniądze na przyszłe wydatki, m.in. na emeryturę.

Sidrauski wykazał, że w stanie stacjonarnym jego modelu, przeciwnie do modelu Tobina, pieniądź jest neutralny, co przejawia się w tym, że wartości zmiennych realnych w stanie stacjonarnym nie zależą od tempa wzrostu podaży pieniądza, które wpływa tylko na wielkość inflacji. Ważnym rezultatem uzyskanym przez Sidrauskiego było też pokazanie, że w jego modelu – podobnie jak w innych modelach typu RCK – stan stacjonarny jest stabilnym punktem siodłowym, co oznacza, że rozwiązanie optymalne modelu, niezależnie od stanu początkowego, jest zbieżne do stanu stacjonarnego wzdłuż jednej i tej samej ścieżki siodłowej.

W kolejnych latach powstało wiele modyfikacji i rozszerzeń modelu Sidrauskiego, których celem była próba lepszego uchwycenia roli pieniądza. Na przykład, w pracy Fischera (1974) zaprezentowano zmodyfikowany model Sidrauskiego, w którym pieniądź jest argumentem w funkcji produkcji. W wypadku tego modelu autor odnotowuje brak neutralności pieniądza w stanie stacjonarnym. Innym przykładem jest praca Brocka (1974), gdzie prezentowano model, w którym w międzyokresowej funkcji użyteczności, oprócz konsumpcji i realnego zasobu pieniądza, uwzględniany jest dodatkowo trzeci argument, którym jest czas wolny. Model opisuje gospodarkę, w której gospodarstwa domowe dzielą swój czas na pracę, która pozwoli im zwiększyć konsumpcję i w efekcie użyteczność, oraz na czas wolny, który jest bezpośrednim źródłem użyteczności. Jest to oczywistym krokiem w kierunku zbliżenia modelu do rzeczywistości. Brock wykazał, że stan stacjonarny w jego modelu istnieje i jest asymptotycznie stabilny.

Modele wzrostu Tobina i Sidrauskiego oraz dziesiątki ich późniejszych rozwinięć i modyfikacji zaliczają się do ekonomii neoklasycznej. Ich podstawowe wspólne cechy to założenie o permanentnej równowadze na rynkach produktu, pracy i pieniądza. Wspólne jest też założenie o technologii produkcji opisanej neoklasyczną funkcją produkcji w postaci intensywnej o malejącej krańcowej efektywności kapitału przypadającego na pracownika.

Współcześnie w neoklasycznej monetarnej teorii wzrostu dominują wywodzące się od modelu Sidrauskiego modele typu Ramseya-Cassa-Koopmansa z pieniądzem, w których – inaczej niż w modelu Tobina czy Solowa – stopa oszczędności nie jest już stałym parametrem, lecz zmienną czasu. Dynamika gospodarki wynikająca z rozwiązania powyższych modeli jest podporządkowana postulatowi maksymalizacji międzyokresowej użyteczności w nieskończonym horyzoncie czasowym przez reprezentatywnego konsumenta – inwestora. Przykłady takich modeli zaprezentowali m.in. Walsh (1998), Turnovsky (2000), Novales i in. (2009) oraz Barbarosa (2018).

Poczynając od lat 60. ubiegłego wieku, równoległe do neoklasycznych monetarnych modeli wzrostu rozwijane były monetarne modele wzrostu zaliczane do ekonomii keynesowskiej. Nurt keynesowskich modeli wzrostu zakłada, że gospodarka jest w stanie nierównowagi i dochodzenie do ścieżki równomiernego wzrostu odbywa się w warunkach nierównowagi. W tych modelach istotnym elementem jest mechanizm zbieżności do równowagi, który polega na zachodzących w kolejnych okresach reakcjach dostosowawczych do różnych stanów nierównowagi (np. produkcja i ceny reagują na nierównowagę na rynku produktów). Innymi słowy, modele te zakładają, że gospodarka dąży do równowagi, ale na jej drodze pojawiają się różne zakłócenia, które wpływają np. na poziom produkcji, zatrudnienia i inflacji.

W przeciwieństwie do modeli neoklasycznych, modele keynesowskie zakładają, że gospodarka może pozostawać w stanie długotrwałej nierównowagi, w której występują m.in. bezrobocie i niewykorzystany potencjał produkcyjny. Modele te zakładają też, że rynki nie zawsze działają efektywnie i w związku z tym mogą występować zaburzenia w gospodarce. W przeciwieństwie do modeli neoklasycznych, w modelach keynesowskich uwzględnia się podział społeczeństwa na pracowników najemnych i właścicieli kapitału. Uwzględnienie takiego podziału społeczeństwa pozwala na bardziej realistyczną analizę procesów gospodarczych i ich wpływu na różne grupy społeczne (nawet w najbardziej rozwiniętych gospodarkach kapitalistycznych, na przykład w Stanach Zjednoczonych większość społeczeństwa utrzymuje się wyłącznie z pracy, często nie posiadając żadnych oszczędności). Modele te biorą pod uwagę m.in. wpływ płac na konsumpcję pracowników, wpływ zysków na inwestycje właścicieli kapitału oraz wpływ polityki fiskalnej i monetarnej na całą gospodarkę. W ten sposób modele keynesowskie pozwalają na analizę problemów społecznych takich jak bezrobocie, ubóstwo czy nierówności dochodowe, co jest istotne z punktu widzenia polityki gospodarczej i społecznej.

W monetarnych modelach keynesowskich szczególną uwagę poświęca się roli polityki monetarnej w stabilizacji gospodarki i wpływie zmian stóp procentowych na aktywność gospodarczą. W tych modelach aktywność gospodarcza zależy od wydatków konsumpcyjnych i inwestycyjnych, które mogą być hamowane przez wyższe stopy procentowe, co z kolei wpływa na zatrudnienie i produkcję. Polityka monetarna, poprzez zmianę stóp procentowych, może wpłynąć na pobudzenie lub hamowanie aktywności gospodarczej i zmianę poziomu inflacji.

Pierwszą grupą takich modeli były modele typu Keynesa-Wicksella (w skrócie modele KW). Modele te mają korzenie w pracach Gunnara Myrdala, Erika Lidahla, Friedricha Hayeka i Johna Maynarda Keynesa. Są próbą pogodzenia krótkookresowych fluktuacji wynikających z nierównowagi między popytem a podażą z długookresowym, równomiernym wzrostem gospodarczym. Liczne przykłady modeli typu Keynesa-Wicksella są prezentowane w pracach Steina (1966, 1968, 1969, 1970, 1971), Rose'a (1966, 1967, 1969), Fischera (1972), Fujina (1974), Sijbena (1977), Nagataniego (1970), Bremsa (1980), Iwai (1981), Asady (1991) i Ogawy (2020).

W odróżnieniu od neoklasycznych modeli wzrostu, w których równowaga między inwestycjami a oszczędnościami jest uważana za naturalną, w modelach Keynesa-Wicksella zakłada się, że decyzje inwestycyjne są niezależne od decyzji oszczędnościowych. Decyzje inwestycyjne są podejmowane przez przedsiębiorstwa, które szukają sposobów na zwiększenie swojego zysku. Wpływ na decyzje inwestycyjne mają przede wszystkim oczekiwany wzrost popytu i poziom rentowności inwestycji. Natomiast decyzje o oszczędnościach są podejmowane przez gospodarstwa domowe i przedsiębiorstwa, które dążą do maksymalizacji swojego dochodu i minimalizacji ryzyka. Wpływ na oszczędności mają przede wszystkim poziom dochodów, ceny i oczekiwania co do przyszłego poziomu inflacji.

W modelach Keynesa-Wicksella oszczędności i inwestycje nie zawsze są równe, co przekłada się na nierównowagę na rynku towarów. Zakłada się także, że ceny zmieniają się w momencie, gdy oszczędności są różne od inwestycji (nierównowaga na rynku towarów). Dodatkowo przyjmuje się nierównowagę na rynku pracy przy jednoczesnym założeniu równowagi na rynku pieniądza.

Podobnie jak w neoklasycznych monetarnych modelach wzrostu, badacze w swoich pracach nad modelami typu KW zajmują się analizą stabilności modelu oraz wpływem polityki pieniężnej (skutkującym wyższą lub niższą inflacją) na wzrost gospodarczy.

Jeden z pierwszych monetarnych modeli typu KW został opisany i zbadany w pracy Steina (1966). Autor wykazuje, że gospodarka opisana jego modelem przy odpowiednich założeniach po pewnym czasie będzie się rozwijała równomiernie ze stałą stopą wzrostu równą stopie wzrostu podaży pracy. Wyniki modelu wskazują na brak neutralności pieniądza. Innymi słowy, wykazano, że większa podaż pieniądza w stanie stacjonarnym przekłada się na wyższy poziom inflacji, co wpływa na wartości zmiennych realnych modelu.

Na bazie modeli typu KW powstały kolejne rozwinięcia keynesowskich monetarnych modeli wzrostu gospodarczego, w których autorzy próbowali ulepszyć wcześniejsze modele, m.in. poprzez modyfikację równań, zmianę założeń, a także poprzez syntezę różnych modeli.

Przykładem może być monetarny model wzrostu AD-AS (zagregowanego popytu i zagregowanej podaży) opisany przez Sargenta (1987)⁴. W odróżnieniu od modelu Keynesa-Wicksella, w modelu AD-AS zakłada się równowagę na rynku towarów. Dopuszcza się nierównowagę na rynku pracy, zakładaną również w modelach typu KW, a poziom zatrudnienia zależy od decyzji produkcyjnych firm. Poziom inflacji zależy od dynamiki płac i dynamiki oczekiwań inflacyjnych opisanych dwoma dodatkowymi równaniami.

Ważnym wnioskiem przedstawionym w pracach Frankego (1992) oraz Chiarelli i in. (2005, rozdział 2) jest odrzucenie twierdzenia przedstawionego przez Sargenta (1987, s. 119) o wpływie polityki pieniężnej na stabilność modelu. Sargent stwierdził, że model wytrącony z równowagi przez zmianę tempa wzrostu podaży pieniądza (zmiana skokowa) zawsze wróci na ścieżkę równomiernego wzrostu. To stwierdzenie nie zostało jednak poparte przez Sargenta żadnym dowodem. Jak zauważyli Flaschel (1993) oraz Franke (1992), stan stacjonarny jest lokalnie asymptotycznie stabilny, a więc odpowiednia zmiana wzrostu podaży pieniądza może doprowadzić do utraty stabilności. Oznacza to, że nieodpowiednia polityka pieniężna może doprowadzić do destabilizacji gospodarki.

Modele AD-AS analizowane są od ponad 20 lat (Chiarella i in., 2005; Flaschel, 1993; Franke, 1992). Badania koncentrują na analizie stanu stacjonarnego oraz warunków, przy których gospodarka jest zbieżna do tego stanu⁵.

Kolejnym przykładem monetarnego modelu wzrostu będącego modyfikacją modelu KW jest monetarny model wzrostu typu Keynesa–Metzlera–Goodwina (w skrócie model KMG) będący tematem niniejszej monografii.

Autorami modelu KMG są trzech ekonomiści keynesowscy: Carl Chiarella, Peter Flaschel i Willy Semmler, którzy zajmowali się rozwojem ekonomii keynesowskiej od ponad dwóch dekad. Wspólnie (niekiedy z innymi współautorami) opublikowali serię książek o ekonomii keynesowskiej z naciskiem na wzajemne relacje między sferą realną a sferą finansową gospodarki. Należy wspomnieć między innymi o obszernej monografii *The dynamics of Keynesian monetary growth* (Chiarella i Flaschel, 2000) i fundamentalnej trylogii *Reconstructing Keynesian macroeconomics*, t. 1-3 (Chiarella i in., 2012, 2013, 2014), w której podejmują próbę całkowitej

⁴ Sargent (1987) przedstawił także klasyczną wersję modelu AD-AS. Te dwa modele różnią się m.in. założeniami na temat równowagi na rynku pracy, który w modelu klasycznym jest w równowadze, a w keynesowskim niekoniecznie.

⁵ Dużo informacji na temat rozwoju monetarnych modeli wzrostu można znaleźć m.in. w pracach Chiarelli i in. (2000) oraz Orphanidesa i Solowa (1990).

reinterpretacji i rekonstrukcji całej makroekonomii keynesowskiej⁶. Inne ważne prace tych autorów to: Asada i in. (2003); Charpe i in. (2011) oraz Chiarella i in. (2000, 2005).

Najważniejszy monetarny model wzrostu analizowany (w różnych wariantach) przez Chiarellę, Flaschela i Semmlera to wspomniany wyżej model KMG. Nazwano go tak, aby podkreślić jego związek z koncepcjami wypracowanymi przez tych trzech wielkich ekonomistów. W równaniach modelu KMG można znaleźć idee wyrażone w pracy Keynesa (1936) oraz w pracy Goodwina (1967) na temat interakcji wzrostu i dystrybucji dochodów; są to komponenty K i G modelu. Modele KMG uwzględniają brak równowagi na rynku towarów, implikacje zmian zapasów oraz stopniowe dostosowywanie zapasów do pożądanego poziomu. Dynamika zapasów jest również związana z koncepcją oczekiwanej sprzedaży (oczekiwanego popytu), sformułowaną zgodnie z założeniami dostosowania zapasów przedstawionymi w pracy Metzlera (1941) – stanowi ona komponent M modelu. Tym samym model KMG nawiązuje także do modeli typu Keynesa-Wicksella przedstawionych m.in. przez Steina (1966), Rose'a (1966) i Fischera (1972). Poza tym warto wspomnieć o jego podobieństwie do modelu keynesowskiego przedstawionego przez Sargenta (1987, rozdział 5).

Modele typu KMG opisują dynamikę gospodarki za pomocą złożonego układu nieliniowych równań różniczkowych odzwierciedlających adaptacyjne procesy decyzyjne. Cechą charakterystyczną tych modeli jest możliwość przekształcenia ich w tzw. postać intensywną, w której wszystkie wyjściowe zmienne są zastępowane nowymi zmiennymi opisującymi proporcje między nimi. Model w postaci intensywnej pozwala na zdefiniowanie stanu stacjonarnego, który opisuje stałe proporcje pomiędzy zmiennymi wyjściowymi utrzymywane w procesie równomiernego wzrostu. Głównymi wynikami teoretycznymi, które można uzyskać dla modelu w postaci intensywnej, są twierdzenia o stabilności stanu stacjonarnego. Twierdzenia te pokazują warunki, w jakich gospodarka zmierza do stanu stacjonarnego, co jest równoznaczne ze zbliżaniem się do ścieżki równomiernego wzrostu.

Ponieważ model w postaci intensywnej jest układem nieliniowych równań różniczkowych, aby udowodnić jego (lokalną) stabilność asymptotyczną, należy wykazać, że wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego tego układu są albo liczbami ujemnymi, albo liczbami zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Badanie wartości własnych to standardowy sposób udowadniania stabilności, stosowany po wielokroć dla różnych modeli dynamicznych. Ponieważ wartości własne są również pierwiastkami odpowiedniego wielomianu, ich analiza jest dość łatwa, jeśli mamy do czynienia z układem dwóch równań różniczkowych. Jednak w wypadku systemów wielowymiarowych takich jak model KMG staje się to zadaniem

⁶ Innym alternatywnym i ważnym nurtem ekonomii odwołującym się do Keynesa jest ekonomia postkeynesowska (Lavoie, 2014).

bardzo trudnym i czasochłonnym. W takiej sytuacji jedyny sposób wykazania, że wartości własne danej macierzy Jacobiego gwarantują stabilność, sprowadza się najczęściej do wyzerowania odpowiednich parametrów macierzy, co umożliwia wielokrotne rozwinięcie Laplace'a wyznacznika macierzy Jacobiego w celu uzyskania ciągu macierzy coraz niższego rzędu, których wartości własne są już prostsze do analizy. Najpierw pokazuje się, że macierz najniższego rzędu ma odpowiednie wartości własne. Następnie, poprzez późniejsze przywrócenie odpowiednio małych dodatnich wartości poprzednio wyzerowanych parametrów, wykazuje się, że również pierwotna macierz Jacobiego ma wartości własne, które są albo liczbami ujemnymi, albo liczbami zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi.

Pierwszy dowód stabilności modelu KMG oparty na zarysowanej powyżej idei został przedstawiony ponad dwadzieścia lat temu w pracy Chiarelli i in. (2002). Inne wersje dowodu stabilności (dotyczące zmodyfikowanych modeli KMG) można znaleźć u Asady i in. (2003) oraz Chiarelli i in. (2006). Opisaną wyżej, zastosowaną przez nich ogólną metodę dowodzenia stabilności modeli KMG, jej autorzy nazwali metodą kaskady macierzy stabilnych (*the cascade of stable matrices approach*)⁷,

Prace nad rozszerzeniami oraz modyfikacjami modelu KMG trwają do dnia dzisiejszego. Przykładem mogą być publikacje Ogawy (2019a, 2019b, 2020), w których rozszerzono model KMG o dualny rynek pracy. Innym przykładem jest praca Flaschela (2020), w której wykorzystano rozbudowany model KMG do analizy wpływu podatków, płatności transferowych i wydatków rządowych na poprawę ochrony socjalnej pracowników należących do sektora gospodarstw domowych. Warto wspomnieć o najnowszej pracy Chiarelli i in. (2021), która jest zwieńczeniem rozwoju bielefeldskiej szkoły myśli makroekonomicznej⁸. Ciekawy wariant modelu KMG z długiem prywatnych przedsiębiorstw, mający na celu modelowanie skutków polityki fiskalnej i monetarnej, został przedstawiony w pracach Asady i in. (2018, 2019). Autorzy tych prac zajmują się również kwestią istnienia cykli granicznych w modelu KMG. Keynesowskie monetarne modele wzrostu podobne do modelu KMG ostatnio przedstawili Murakami (2016, 2018, 2020) oraz Araujo i in. (2020). W pracach tych bada się m.in. istnienie cykli granicznych i orbit okresowych oraz skuteczność antycyklicznej polityki pieniężnej.

⁷ Termin *the cascade of stable matrices approach* został użyty m.in w pracy Chiarelli i in. (2006). Podobna metoda dowodzenia stabilności, polegająca na chwilowym zerowaniu elementów macierzy Jacobiego modelu i późniejszym przywracaniu ich dodatnich wartości, została zastosowana, niezależnie od cytowanych prac, w dowodach stabilności innych wielowymiarowych, nieliniowych modeli dynamicznych w pracach: Duménila i Lévy'ego (1991) oraz Kiedrowskiego (2018).

⁸ Szkoła Bielefeld odnosi się do grupy ekonomistów i naukowców społecznych związanych z Bielefeld University w Niemczech. Badania szkoły koncentrują się na makroekonomii, polityce gospodarczej i zmianach społecznych, a jej członkowie wnieśli znaczący wkład w te dziedziny. Jednym z członków tej szkoły był autor modelu KMG Peter Flaschel.

Niniejsza monografia jest wkładem autora w badania nad modelem KMG. Autor analizuje w niej dwie nowe, autorskie wersje modelu KMG. Modele te, mające wiele cech wspólnych, różnią się zasadniczo sposobem opisu rynku pieniężnego. W pierwszym modelu (nazywanym w monografii modelem KMG) zakłada się wykładniczy wzrost podaży pieniądza. Równocześnie popyt na pieniądź jest rosnącą funkcją oczekiwanego popytu finalnego na rynku produktu i malejącą funkcją stopy procentowej. W konsekwencji, przy założeniu równowagi rynku pieniężnego, stopa procentowa musi się dostosowywać do zmian oczekiwanego popytu w taki sposób, aby popyt na pieniądź (równy podaży pieniądza) również rósł wykładniczo.

W drugim modelu funkcja popytu na pieniądź w ogóle nie występuje, a dynamika stopy procentowej opisana jest równaniem Taylora (z tego względu – dla różnienia – drugi model nazywany jest modelem KMGT). Zgodnie z równaniem Taylora, zmiany stopy procentowej zależą od trzech czynników – od odchylenia bieżącej stopy procentowej od jej pożądanej wartości, od odchylenia stopy inflacji od pożądanej stopy inflacji (celu inflacyjnego) oraz od odchylenia wskaźnika wykorzystania zdolności produkcyjnych od naturalnego poziomu tego wskaźnika. W modelu KMGT zmiany podaży pieniądza są wielkością rezydualną zależną głównie od popytu przedsiębiorstw na kredyty inwestycyjne oraz od potrzeb pożyczkowych państwa (emisji obligacji).

Oba modele są wynikiem licznych modyfikacji wprowadzonych przez autora do ich pierwowzorów. Punktem odniesienia dla pierwszego modelu prezentowanego w monografii jest model KMG przedstawiony przez Asadę i in. (2003). Pierwowzorem drugiego modelu jest z kolei model KMG z pracy Charpe'a i in. (2011).

Inną istotną różnicą między omawianymi modelami jest to, że w modelu KMG występuje jedynie równanie behawioralne opisujące czynniki wpływające na poziom inwestycji netto, ale nie ma wskazanych *explicite* źródeł finansowania tych inwestycji. W modelu KMGT, poza wspomnianym równaniem behawioralnym (w rozbudowanej postaci), pojawia się także równanie pokazujące wprost, że inwestycje przedsiębiorstw są finansowane z ich zysków oraz z kredytu inwestycyjnego.

W prezentowanej monografii zrealizowano cztery cele badawcze. Pierwszym było opracowanie dwóch nowych modeli typu KMG, które różnią się od wersji analizowanych w dotychczasowej literaturze licznymi modyfikacjami. Drugim celem było przekształcenie sformułowanych modeli do postaci intensywnej oraz wyznaczenie i analiza ich stanów stacjonarnych odpowiadających ścieżkom równomiernego wzrostu. Najważniejszy w całej monografii i najtrudniejszy do osiągnięcia był cel trzeci, którym było udowodnienie stabilności obu badanych modeli KMG. Ostatnim ze zrealizowanych celów było przeprowadzenie szeregu symulacji komputerowych na podstawie danych o polskiej gospodarce. Symulacje dostarczyły informacji, których nie można było uzyskać w wyniku analiz jakościowych modelu.

Zastosowane modyfikacje służą udoskonaleniu modeli poprzez wyeliminowanie z ich równań niektórych wątpliwych czynników obecnych we wcześniejszych

wersjach modeli KMG. Czynniki te, czego nie ukrywają autorzy modelu, zostały wprowadzone nie ze względu na ich ekonomiczną przydatność, ale przede wszystkim ze względu na prostotę, która ułatwia matematyczną analizę modelu. Pierwsze dwie modyfikacje zaproponowane w niniejszej monografii dotyczą równań opisujących tempo wzrostu kapitału rzeczowego $\dot{K}/K$ oraz tempo wzrostu oczekiwanego popytu $\dot{Y}^e/Y^e$. We wszystkich modelach KMG przedstawionych przez Chiarellę i in. powyższe równania zawierają parametr n wyrażający sumę stałego tempa wzrostu podaży pracy i tempa wzrostu wydajności pracy. Wprowadzenie do tych równań n jest bardzo wygodne, ponieważ w stanie stacjonarnym pozostałe składniki równań zerują się, co natychmiast implikuje, że w stanie stacjonarnym zarówno kapitał rzeczowy, jak i oczekiwany popyt rosną w tempie n . W niniejszej monografii w równaniu opisującym wzrost kapitału rzeczowego $\dot{K}/K$ parametr n został zastąpiony zmienną wyrażającą tempo wzrostu oczekiwanego popytu $\dot{Y}^e/Y^e$. Jednocześnie parametr n usunięto z równania opisującego tempo wzrostu oczekiwanego popytu $\dot{Y}^e/Y^e$ i zastąpiono go stopą wzrostu płacy realnej jako jednym z dwóch czynników wpływających na $\dot{Y}^e/Y^e$, co z ekonomicznego punktu widzenia jest dużo bardziej uzasadnione. Tempo wzrostu płacy realnej jest zmienną endogeniczną, która zależy od innych zmiennych modelu: przede wszystkim od tempa wzrostu płacy nominalnej oraz od inflacji. Podobny charakter ma trzecia modyfikacja dotycząca równania określającego poziom produkcji Y . W tym wypadku wzbudzający wątpliwości czynnik nN^d (N^d – pożądany poziom zapasów) został zastąpiony przez $\dot{Y}^e$, czyli przez zmianę oczekiwanego popytu.

Inne ważne modyfikacje dotyczą założenia o podatkach oraz odsetkach od posiadanych obligacji rządowych. We wszystkich wersjach modelu KMG, aby ułatwić wyprowadzenie postaci intensywnej modelu, przyjmuje się, że ryczałtowe realne podatki pomniejszone o odsetki z posiadanych obligacji rządowych są pobierane w taki sposób, że ich stosunek do kapitału rzeczowego pozostaje stały (Chiarella i in., 2000). W konsekwencji nie uwzględnia się zależności podatków od stawek podatkowych nakładanych na dochody z pracy czy z kapitału rzeczowego. Tę zależność wzięto pod uwagę w autorskiej wersji modelu przedstawionej w niniejszej monografii, co pozwala na pełniejszą analizę polityki fiskalnej w zakresie podatków i deficytu budżetu państwa. W szczególności, w przeciwieństwie do modeli typu KMG prezentowanych dotąd w literaturze, stosunek deficytu budżetu państwa do kapitału rzeczowego przestaje być stały w czasie, pomimo założenia o stałym stosunku wydatków państwa do kapitału rzeczowego.

Powyższe modyfikacje dotyczą obu modeli przedstawionych w monografii. Kolejna modyfikacja dotyczy tylko modelu KMG z rozdziału pierwszego i polega na wprowadzeniu do tego modelu nieliniowej funkcji popytu na pieniądź. W modelach KMG prezentowanych w literaturze zawsze była rozpatrywana liniowa funkcja popytu na pieniądź, której wartość zależy od oczekiwanego popytu na rynku produktu oraz odchylenia bieżącej stopy procentowej od danej egzogenicznie pożą-

danej stopy procentowej (równej stopie procentowej w stanie stacjonarnym). W stanie stacjonarnym odchylenie między obiema stopami przyjmuje wartość zero, co sprawia, że popyt na pieniądz w stanie stacjonarnym zależy tylko od oczekiwanego popytu na rynku produktu i nie zależy od stopy procentowej. Jest to wątpliwe z ekonomicznego punktu widzenia⁹. Dlatego też w analizowanym w pierwszym rozdziale monografii modelu KMG rozważana jest nieliniowa funkcja popytu na pieniądz. Ma to daleko idące konsekwencje, gdyż w rezultacie stopa procentowa w stanie stacjonarnym staje się wielkością endogeniczną, zależną od wszystkich parametrów modelu.

Wspomniane modyfikacje skutkują pojawieniem się nowych sprzężeń zwrotnych oraz zwiększeniem złożoności obu analizowanych modeli. Mimo to okazuje się, że przedstawione w monografii modele można przekształcić do postaci intensywnej oraz możliwe jest jednoznaczne wyznaczenie stanu stacjonarnego, co jest drugim celem monografii. Otwiera to drogę do wykazania lokalnej asymptotycznej stabilności omawianych modeli, czyli do realizacji trzeciego celu monografii, będącego przedmiotem zainteresowania każdej matematycznej teorii wzrostu gospodarczego.

Zaprezentowane w monografii dwa dowody lokalnej asymptotycznej stabilności dwóch modeli KMG wykorzystują wspomnianą wyżej metodę kaskady macierzy stabilnych, nazwaną tak i zastosowaną przez Chiarellę i in. (2000, 2006) oraz Charpe'a i in. (2011). Mimo to, z co najmniej dwóch powodów, ich przeprowadzenie nie sprowadza się tylko do odtworzenia dowodów stabilności wcześniejszych wersji modelu KMG. Po pierwsze matematyczna struktura modeli KMG opracowanych w monografii jest znacznie bardziej złożona niż jego wcześniejsze wersje analizowane przez Chiarellę i in. Jest to szczególnie widoczne w postaci intensywnej modeli (w wypadku modelu KMG postać ta składa się z siedmiu nieliniowych równań różniczkowymi z dwiema dodatkowymi zmiennymi pomocniczymi, w wypadku modelu KMG-T tych równań jest dziewięć z dwiema dodatkowymi zmiennymi pomocniczymi), dla których wyznaczono macierze Jacobiego w stanie stacjonarnym i zbadano ich wartości własne. Drugim powodem jest to, że dowód stabilności uzyskuje się przy innym zestawie założeń dotyczących parametrów modelu. Część z tych założeń dotyczy stawek podatkowych, których w modelach KMG analizowanych przez Chiarellę i in. w ogóle nie ma.

Żeby udowodnić stabilność, trzeba było pokonać dwie podstawowe trudności. Pierwszą z nich było wyznaczenie pochodnych cząstkowych w stanie stacjonarnym wszystkich funkcji definiujących dynamikę modelu w postaci intensywnej w celu zbadania macierzy Jacobiego. Druga trudność dotyczyła pytania, które parametry w macierzy Jacobiego należy wyzerować oraz w jakiej kolejności, aby ostatecznie pokazać, że wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego są albo liczbami ujem-

⁹ Chiarella i in. (2000, s. 279) przyznają, że powyższe założenie zostało wprowadzone w celu ułatwienia analizowania modelu.

nymi, albo liczbami zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Wybór parametrów, które zostaną wyzerowane, nie budzi takiej wątpliwości jak kolejność ich zerowania. Kolejne próby udowodnienia stabilności stanu stacjonarnego pokazały, że niepoprawna kolejność zerowania parametrów prowadzi do komplikacji przy określaniu znaków badanych wartości własnych macierzy Jacobiego. Wykorzystana metoda kaskady macierzy stabilnych nie daje żadnej wskazówki, jak sobie poradzić z tym kluczowym pytaniem. Właściwy sposób postępowania został znaleziony w wyniku pracochłonnego procesu przez podjęcie licznych prób, które ostatecznie doprowadziły do sukcesu.

Udowodnienie istnienia stanu stacjonarnego oraz wykazanie, że przy pewnych założeniach stan ten jest lokalnie asymptotycznie stabilny, nie daje odpowiedzi na wiele ważnych z ekonomicznego punktu widzenia pytań dotyczących rozwoju gospodarki opisaną omawianymi modelami KMG i KMGT. Jednym z nich jest pytanie, ile czasu potrzebuje gospodarka na to, aby – startując ze stanu początkowego – znalazła się na ścieżce równomiernego wzrostu. Inne równie ważne pytanie dotyczy tego, jak bardzo oddalony od stanu stacjonarnego może być stan początkowy gospodarki, aby zmierzała ona do stanu stacjonarnego. Na te oraz wiele innych pytań tego rodzaju można uzyskać odpowiedzi tylko w wyniku symulacji komputerowych. Przeprowadzenie takich symulacji było czwartym i ostatnim celem monografii.

Symulacje przeprowadzono dla danych o polskiej gospodarce z wykorzystaniem obu modeli analizowanych w monografii. Przed przystąpieniem do symulacji modele te zmodyfikowano w taki sposób, aby można było uwzględnić w nich jak najwięcej informacji o polskiej gospodarce, zachowując zarazem ich matematyczną strukturę. W dalszej kolejności, na podstawie tych samych danych, skalibrowano parametry modeli oraz wyznaczone zostały ich stany stacjonarne.

Przeprowadzone liczne symulacje komputerowe potwierdziły prawdziwość udowodnionych w monografii twierdzeń o lokalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego modeli KMG i KMGT. Wyniki symulacji okazały się podobne do wyników uzyskanych przez innych autorów i pokazały, że dochodzenie gospodarki do stanu stacjonarnego jest powolne, oscylacyjne i wymaga bardzo długiego horyzontu czasowego. W wynikach symulacji stan stacjonarny jawi się raczej jako stan, który, mimo że nieosiągalny w realistycznym horyzoncie czasowym, pełni funkcję „busoli” gospodarki wyznaczającej kierunek zachodzących w niej zmian strukturalnych spowodowanych procesami rynkowymi. Na tym przede wszystkim polega praktyczne znaczenie stabilności modeli KMG.

Oprócz empirycznych analiz stabilności, przeprowadzając symulacje komputerowe, analizie poddano również wpływ polityki fiskalnej i pieniężnej na gospodarkę w krótszych horyzontach czasowych. Porównano wyniki symulacji uzyskane na podstawie modelu KMG i modelu KMGT. Dodatkowo przeprowadzono symulację działań osłonowych ze strony polityki pieniężnej chroniących przed skutkami perturbacji gospodarczych związanych z pandemią wirusa SARS-CoV-2. Analizo-

wano, jak ekspansywna polityka pieniężna może łagodzić skutki tych perturbacji oraz jakie mogą być jej długookresowe skutki.

Monografia składa się z czterech rozdziałów. W rozdziale pierwszym przedstawiono autorską wersję modelu KMG z wykładniczo rosnącą podażą pieniądza. Model został sprowadzony do postaci intensywnej, wyznaczono jego stan stacjonarny i zbadano wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany wartości parametrów modelu.

W drugim rozdziale zaprezentowano kolejną autorską wersję modelu KMG – model z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym. Następnie przedstawiono analizę tego modelu podobną do analizy modelu z rozdziału pierwszego.

W rozdziale trzecim przedstawiono matematyczne dowody stabilności obu modeli prezentowanych w poprzednich rozdziałach. Dowody te są głównymi, teoretycznymi wynikami autora prezentowanymi w monografii. Udowodnione twierdzenia o stabilności podają wystarczające warunki zbieżności modelowanych gospodarek do ścieżki równomiernego wzrostu.

Czwarty rozdział poświęcono symulacjom komputerowym z wykorzystaniem danych o polskiej gospodarce, przeprowadzonych na podstawie badanych modeli. Potwierdzają one prawdziwość twierdzeń o stabilności udowodnionych w rozdziale trzecim.

Ostatnią i integralną część monografii stanowią zakończenie i bibliografia.

Wyniki przedstawione w monografii będą punktem wyjścia do dalszych prac autora mających na celu m.in. zbadanie bifurkacji Hopfa, które mogą być kluczowe w symulacjach kryzysów gospodarczych, oraz dalsze modyfikacje modelu w celu jeszcze lepszego dostosowania go do opisu rzeczywistości gospodarczej.

ROZDZIAŁ 1

Model Keynesa–Metzlera–Goodwina
z egzogeniczną podażą pieniądza

Niniejszy rozdział poświęcono przedstawieniu i analizie zmodyfikowanej przez autora wersji modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza. Wersja oryginalna modelu, będąca odniesieniem dla tego rozdziału, była wcześniej prezentowana w pracach Chiarelli i in. (2000, 2005, 2013).

W pierwszym podrozdziale zaprezentowano wyjściowe równania zmodyfikowanego modelu, a następnie przedstawiono szczegółową analizę sprzężeń zwrotnych między jego zmiennymi. W drugim podrozdziale przedstawiono sprowadzenie modelu do postaci intensywnej i wyznaczono jego stan stacjonarny, generujący ścieżkę równomiernego wzrostu gospodarki. Przeprowadzono też analizę wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany parametrów modelu.

1.1. Wyjściowa postać modelu

Prezentację modelu rozpoczniemy od omówienia kolejnych bloków równań modelu. Część z prezentowanych równań jest identyczna z równaniami rozpatrywanymi przez Chiarellę i in., a pozostałe to równania zmodyfikowane lub całkowicie nowe. Ważnym elementem opisu wprowadzonych modyfikacji są szczegółowe uwagi zamieszczone w przypisach, zawierające porównania zmodyfikowanych równań z ich oryginalnymi odpowiednikami przyjmowanymi w pracach Chiarelli i in.

Wszystkie zmienne modelu są z założenia ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami czasu. W celu uproszczenia zapisu zmienne te prezentowane są jednak bez indeksu czasu. W całej monografii symbolem $\dot{x}$ oznaczamy pochodną $\dot{x} = dx/dt$ zmiennej $x = x(t)$ względem czasu, którą interpretujemy jako zmianę wartości tej zmiennej (przyrost lub spadek) przypadającą na nieskończenie mały przedział czasu. Symbolem $\hat{x}$ oznaczamy z kolei stopę wzrostu zmiennej $x = x(t)$ postaci $\hat{x} = \dot{x}/x$ ¹⁰.

1.1.1. Popyt konsumpcyjny, płace i ceny

Całkowity popyt finalny Y^d (w ujęciu realnym) jest sumą konsumpcji sektora prywatnego C , inwestycji brutto sektora prywatnego I oraz popytu sektora rządowego (publicznego) G :

$$Y^d = C + I + G. \quad (1.1.1)$$

Popyt konsumpcyjny opisuje równanie:

$$C = (1 - \tau_w) \omega L^d, \quad (1.1.2)$$

¹⁰ Takie oznaczenie stosujemy konsekwentnie do wszystkich zmiennych opisywanych w monografii.

gdzie: ω – płaca realna, L^d – popyt na pracę (równy z założenia zatrudnieniu), τ_w – stawka podatku od dochodów z pracy. Pomimo pozornej prostoty równania (1.1.2) dynamika konsumpcji jest wynikiem złożonych procesów kształtujących z jednej strony dynamikę produkcji wpływającą na zatrudnienie, a z drugiej strony dynamikę płacy realnej $\omega = w/p$, będącej ilorazem płacy nominalnej w i poziomu cen p .

Stopa wzrostu płacy realnej $\hat{\omega} = \dot{\omega}/\omega$ jest różnicą pomiędzy stopą wzrostu płac nominalnych $\hat{w}$ i stopą wzrostu cen, czyli wskaźnikiem inflacji $\pi = \hat{p}$:

$$\hat{\omega} = \hat{w} - \hat{p}. \quad (1.1.3)$$

Dynamikę płac i cen określają dwa oddzielne równania dwóch krzywych Phillipsa¹¹. Stopa wzrostu płacy nominalnej kształtuje się według następującego „płacowego” równania krzywej Phillipsa:

$$\hat{w} = \beta_w (V - V^o) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^e + n, \quad (1.1.4)$$

w którym $\beta_w > 0$ jest parametrem reakcji stopy wzrostu płacy nominalnej na odchylenie stopy zatrudnienia V ($0 < V < 1$) (stosunku zatrudnienia do podaży pracy) od naturalnej stopy zatrudnienia V^o ¹². Na stopę wzrostu płac ma także wpływ wypukła kombinacja κ_w ($0 < \kappa_w < 1$) wskaźników inflacji (stopy wzrostu cen) $\pi = \hat{p}$ i oczekiwanej inflacji π^e oraz stała w czasie stopa wzrostu wydajności pracy $n > 0$.

Wskaźnik inflacji $\pi = \hat{p}$ opisuje z kolei „cenowe” równanie krzywej Phillipsa:

$$\hat{p} = \beta_p (u - u^o) + \kappa_p (\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p) \pi^e, \quad (1.1.5)$$

zgodnie z którym inflacja zależy od odchylenia wskaźnika wykorzystania zdolności produkcyjnych u ($0 < u < 1$) od jego normalnego poziomu u^o ¹³ oraz od wypukłej

¹¹ Więcej wiadomości na temat krzywej Phillipsa z oczekiwaniami inflacyjnymi można znaleźć w pracach Galbraitha (1997), Rose’a (1990) oraz Faira (1997a, 1997b). Natomiast interesującą dyskusję, czy krzywa Phillipsa znajduje potwierdzenie empiryczne, przedstawili Mankiw (2001), Coenen (2003) oraz Grabia (2014).

¹² W literaturze częściej pojawia się równoważne naturalnej stopie zatrudnienia pojęcie naturalnej stopy bezrobocia (*non-accelerating-inflation rate of unemployment*, NAIRU). Koncepcja naturalnej stopy bezrobocia bazuje m.in. na pracy Friedmana (1968). Friedman twierdził, że w gospodarce znajdującej się w stanie równowagi zawsze występuje pewien stały poziom bezrobocia (NAIRU), który jest niezależny od zmian w popycie globalnym (więcej na temat koncepcji NAIRU można znaleźć w pracach Galbraitha (1997) oraz Romera (1996).

¹³ Normalny poziom wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej u^o jest zdefiniowany jako pewien stały poziom wykorzystania zdolności produkcyjnych, który przyczynia się do stabilizacji poziomu cen. Więcej na temat normalnego poziomu wykorzystania mocy produkcyjnej można znaleźć m.in. w pracy Bassiego (2019).

kombinacji oczekiwanej inflacji i nadwyżki stopy wzrostu płac nominalnych ponad stopę wzrostu wydajności pracy¹⁴. Współczynnik $\beta_p > 0$ jest parametrem reakcji cen na odchylenie $u - u^o$ (lukę produkcyjną)¹⁵.

Zmiana oczekiwanej inflacji (zmiana oczekiwań inflacyjnych), wyrażona pochodną $\dot{\pi}^e$, następuje z kolei w sposób opisany równaniem:

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \pi^o - \pi^e), \quad (1.1.6)$$

w którym β_{π^e} jest dodatnim parametrem reakcji, a suma $\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \pi^o$ jest wypukłą kombinacją aktualnej inflacji $\pi = \hat{p}$ i inflacji w stanie stacjonarnym $\pi^o = \mu - n$, będącej różnicą między daną egzogenicznie stałą stopą wzrostu podaży pieniądza μ a stopą równomiernego wzrostu gospodarki, równą stopie wzrostu wydajności pracy n . Jak wynika z równania (1.1.6), oczekiwania inflacyjne wzrastają, gdy kombinacja $\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \pi^o$ jest większa od aktualnie oczekiwanej inflacji π^e ¹⁶.

1.1.2. Popyt inwestycyjny i dynamika majątku trwałego

Popyt inwestycyjny sektora prywatnego I jest sumą inwestycji netto powiększających zasób kapitału trwałego przedsiębiorstw oraz inwestycji restytucyjnych ponoszonych w celu zastąpienia kapitału, który uległ deprecjacji. Inwestycje netto opisuje pochodna kapitału względem czasu $\dot{K}$, a inwestycje restytucyjne – iloczyn δK , gdzie $0 < \delta < 1$ jest wskaźnikiem deprecjacji kapitału. Zatem:

$$I = \dot{K} + \delta K. \quad (1.1.7)$$

Inwestycje netto (przyrost kapitału) kształtują się zgodnie z równaniem behawioralnym:

$$\dot{K} = i_1 (\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) K + i_2 (u - u^o) K + \hat{Y}^e K, \quad (1.1.8)$$

¹⁴ Wskaźnik wykorzystania zdolności produkcyjnych u ($0 < u < 1$) oraz stopa zatrudnienia V ($0 < V < 1$) są zmiennymi modelu zdefiniowanymi dokładnie w punkcie 1.1.6 (równania (1.1.22) i (1.1.25)).

¹⁵ Odchylenie $u - u^o$ determinuje tzw. lukę produkcyjną będącą różnicą między faktycznym poziomem uzyskanego PKB a możliwym produktem potencjalnym (Białowolski, 2005, s. 37–38).

¹⁶ Idea równania (1.1.6) pochodzi od Grotha (1988, s. 254). Korekta oczekiwań inflacyjnych π^e jest kombinacją dwóch reguł: reguły oczekiwań adaptacyjnych oraz mechanizmu regresywnego ze współczynnikiem α . Przypadek graniczny $\alpha = 1$ reprezentuje oczekiwania adaptacyjne. Drugi skrajny przypadek, $\alpha = 0$, reprezentuje mechanizm regresywny. Szybkość dostosowań oczekiwań inflacyjnych określa parametr reakcji $\beta_{\pi^e} > 0$.

gdzie: ρ^e – oczekiwana stopa zysku z kapitału trwałego, ξ – premia za ryzyko¹⁷, r – nominalna stopa procentowa od obligacji rządowych (rentowność obligacji), $(r - \pi^e)$ – oczekiwana realna stopa procentowa, $\hat{Y}^e = \dot{Y}^e/Y^e$ – oczekiwana stopa wzrostu popytu finalnego (wielkość popytu), $i_1 > 0$ oraz $i_2 > 0$ to parametry reakcji.

Zgodnie ze wzorem (1.1.8) czynnikami sprzyjającymi wysokiej stopie wzrostu kapitału $\hat{K} = \dot{K}/K$ są:

- dodatnia różnica między realną oczekiwaną stopą zysku z kapitału trwałego ρ^e zmniejszoną o premię za ryzyko ξ a realną oczekiwaną stopą procentową od obligacji równą $r - \pi^e$,
- wysoki stopień wykorzystania zdolności produkcyjnych, przekraczający stopień naturalny $u - u^o > 0$,
- wysoka stopa wzrostu oczekiwanego popytu (sprzedaży) $\hat{Y}^e = \dot{Y}^e/Y^e$.

Uzależnienie stopy wzrostu kapitału od stopy wzrostu oczekiwanego popytu jest pierwszą modyfikacją modelu KMG wprowadzoną przez autora¹⁸. Jest to założenie zgodne z teorią keynesowską, w której podkreśla się kluczową rolę popytu jako determinanty wzrostu gospodarczego:

„The feature that is uniquely Keynesian in growth models, and is found in all such models, however, is the role of aggregate demand as a determinant of growth.”

(Dutt, 2012, s. 42).

Stopa wzrostu oczekiwanego popytu $\hat{Y}^e$ zależy z kolei od stopy wzrostu płac realnych $\hat{w}$ oraz względnego błędu oczekiwań dotyczących wielkości realnego popytu $(Y^d - Y^e)/Y^e$:

$$\hat{Y}^e = \hat{w} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}, \quad (1.1.9)$$

gdzie $\beta_{y^e} > 0$ jest parametrem reakcji.

¹⁷ Premia za ryzyko kapitałowe (*equity risk premium*) jest to termin opisujący poziom ryzyka inwestycyjnego związanego z danym krajem lub rynkiem (w porównaniu z pozbawionym ryzyka inwestowaniem w obligacje rządowe). Premię za ryzyko kapitałowe określa się nadwyżkę zysku z inwestycji kapitałowych ponad stopę wolną od ryzyka.

¹⁸ W innych modelach KMG dynamika kapitału rzeczowego jest opisana znacznie prostszym równaniem postaci: $\dot{K} = i_1(\rho^e - (r - \pi^e))K + i_2(u - u^o)K + nK$ (Chiarella i in., 2013, s. 246). Wobec tego, że w stanie stacjonarnym $\rho^e = (r - \pi^e)$ oraz $u = u^o$, z równania tego wynika bezpośrednio, że w stanie stacjonarnym stopa wzrostu kapitału rzeczowego $\dot{K}/K$ jest równa stopie stałej wzrostu wydajności pracy n . Jak przyznają Chiarella i in., przyjęta przez nich postać równania dynamiki kapitału nie tylko ułatwia wprowadzenie stanu stacjonarnego modelu, ale – co ważniejsze – ułatwia także udowodnienie twierdzenia o lokalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego. Można w związku z tym przypuszczać, że uzależnienie stopy wzrostu kapitału od danego parametru n było podyktowane wyłącznie chęcią uproszczenia analiz.

Pogląd, że wzrost płacy realnej zwiększa oczekiwany popyt, jest dość oczywisty i wyrażany przez wielu ekonomistów (Lavoie i Stockhammer, 2013; Napoletano i in., 2012). Pomimo to zależność powyższa nie była uwzględniana we wcześniejszych wersjach modelu KMG. Wprowadzenie równania (1.1.9) jest drugą autorską modyfikacją modelu KMG¹⁹.

Warto podkreślić, że składnik $\hat{Y}^e K$ w równaniu (1.1.8) w połączeniu ze wzorem (1.1.9) zwiększa złożoność modelu, wprowadzając do niego kolejne duże sprzężenie zwrotne. Z jednej strony inwestycje $I = \dot{K} + \delta K$ są bowiem składnikiem popytu końcowego $Y^d = C + I + G$, a z drugiej strony są zależne od popytu końcowego. Ta ostatnia zależność jest realizowana bezpośrednio przez równania (1.1.8) i (1.1.9) oraz pośrednio przez to, że zgodnie ze wzorami (1.1.19) i (1.1.20) popyt końcowy wpływa na decyzje produkcyjne, które z kolei poprzez zależności (1.1.3)–(1.1.5) oraz (1.1.22), (1.1.23) i (1.1.25) wpływają na wzrost płacy realnej i oczekiwanego popytu, a tym samym na wzrost kapitału rzeczowego (o czym będzie mowa w dalszej części opracowania).

Oczekiwana realna stopa zysku z kapitału rzeczowego jest stosunkiem oczekiwanego zysku do kapitału rzeczowego, gdzie oczekiwany zysk jest różnicą między oczekiwaną wielkością popytu finalnego Y^e a kosztami pracy ωL^d i deprecją kapitału rzeczowego:

$$\rho^e = \frac{Y^e - \omega L^d - \delta K}{K}. \quad (1.1.10)$$

1.1.3. Deficyt budżetowy i dynamika długu publicznego

Podobnie jak w pracach Sargenta (1987), Asady i in. (2012), Chiarelli i in. (2000, 2005) oraz Charpe'a i in. (2011), dla uproszczenia przyjmuje się, że popyt sektora rządowego G jest proporcjonalny do kapitału rzeczowego K , czyli

$$G = gK, \quad (1.1.11)$$

gdzie g jest stałym w czasie stosunkiem popytu sektora rządowego do kapitału.

Założenie powyższe umożliwia sprowadzenie całego modelu do postaci intensywnej, w której zmienne wyrażają wartości wyjściowych zmiennych na jednostkę kapitału rzeczowego. Warunek $G = gK$ implikuje dodatkowo, że w stanie stacjonarnym popyt sektora rządowego stanowi stałą część produkcji Y .

¹⁹ We wszystkich wcześniejszych wersjach modelu KMG stopa wzrostu oczekiwanego popytu $\hat{Y}^e$ nie wpływa na stopę wzrostu kapitału $\hat{K}$, a jedynie na wielkość produkcji. Stopa ta nie zależy od stopy wzrostu płacy realnej $\hat{\omega}$, lecz jest opisana równaniem $\hat{Y}^e = n + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$, gdzie n jest egzogenicznie określoną stałą stopą wzrostu zatrudnienia lub sumą stóp wzrostu zatrudnienia i wydajności pracy (Chiarelli i in., 2013, s. 247). Takie założenie jest dość wątpliwe z ekonomicznego punktu widzenia.

Poza wydatkami na dobra i usługi, wydatki rządowe obejmują również odsetki od obligacji wypłacane sektorowi prywatnemu, których realna wartość wynosi rB/p . Wydatki rządowe są finansowane głównie z podatków T . Całkowity dochód rządu z podatków (w ujęciu realnym) to suma podatków od wynagrodzeń $\tau_w \omega L^d$ i podatków od rzeczywistych zysków z kapitału trwałego $\tau_c \rho K$ i finansowego $\tau_c \cdot rB/p$ (od realnej wartości obligacji rządowych):

$$T = \tau_w \omega L^d + \tau_c \left(\rho K + \frac{rB}{p} \right), \quad (1.1.12)$$

gdzie τ_w jest stawką podatkową od wynagrodzeń, a τ_c – jednolitą stawką podatkową od zysków z kapitału rzeczowego i finansowego (obligacji). Z kolei ρ to rzeczywista stopa zysku z kapitału rzeczowego, którą definiujemy jako stosunek rzeczywistego zysku do kapitału rzeczowego, gdzie rzeczywisty zysk jest różnicą między rzeczywistym popytem równym wartości realnego popytu Y^d a realnymi kosztami pracy ωL^d i deprecjacji kapitału δK :

$$\rho = \frac{Y^d - \omega L^d - \delta K}{K}.$$

Należy podkreślić, że równanie (1.1.12), mimo swojej oczywistości, również nie występowało we wcześniejszych wersjach modelu KMG²⁰.

Podobnie jak w innych modelach KMG, na przykład Chiarelli i in. (2000), przyjmuje się, że deficyt budżetowy rządu jest finansowany albo poprzez sprzedaż nowych obligacji sektorowi publicznemu, albo poprzez operacje otwartego rynku prowadzone przez bank centralny, który, emitując nowy pieniądz, nabywa krótkoterminowe obligacje od posiadaczy aktywów. Operacje otwartego rynku prowadzone przez bank centralny stanowią unikatowy kanał, przez który pieniądz trafia do gospodarki. W związku z tym równanie deficytu budżetowego rządu przyjmuje postać:

$$\dot{M} + \dot{B} = pG + rB - pT, \quad (1.1.13)$$

gdzie B to całkowita wartość obligacji rządowych o stałej cenie w posiadaniu sektora prywatnego, $\dot{B}$ (pochodna B względem czasu) odzwierciedla zmianę liczby obligacji, a $\dot{M}$ (pochodna M – podaży pieniądza – względem czasu) odzwierciedla zmianę ilości pieniądza znajdującą się w rękach sektora prywatnego.

²⁰ We wcześniejszych wersjach modelu KMG (Chiarelli i in., 2013, s. 247) zakłada się stały w czasie stosunek dodatniego salda realnych transferów finansowych do i z budżetu państwa, równego $T - rB/p$, do wartości kapitału, czyli $(T - rB/p)/K = t^n = \text{const}$. Założenie takie jest bardzo wątpliwe z ekonomicznego punktu widzenia, za to bardzo pomocne w matematycznej analizie modelu. Podobne założenie dotyczące podatków można znaleźć u Sargenta (1987, s. 16) i u Rødsetha (2000, s. 122). Wprowadzenie równania (1.1.12), zasadne z ekonomicznego punktu widzenia, znacząco komplikuje matematyczną analizę modelu – wyznaczenie stanu stacjonarnego i dowód jego stabilności.

1.1.4. Rynek pieniądza

Celem polityki pieniężnej banku centralnego jest utrzymywanie stałego tempa wzrostu podaży pieniądza $\mu > 0$, a więc

$$\hat{M} = \frac{\dot{M}}{M} = \mu. \quad (1.1.14)$$

W modelu zakładamy, że rynek pieniężny w każdym momencie czasu jest w stanie równowagi. Tak więc stałe tempo wzrostu podaży pieniądza wymusza identyczny wzrost popytu na pieniądź, aby w każdym momencie spełnione było równanie:

$$M = M^d, \quad (1.1.15)$$

gdzie M^d to popyt na pieniądź.

Z kolei popyt na pieniądź M^d rośnie wraz z oczekiwanym nominalnym popytem finalnym na produkt, równym pY^e , oraz maleje ze wzrostem nominalnej stopy procentowej r . Zakładamy, że zależność tę wyraża nieliniowa funkcja popytu na pieniądź postaci:

$$M^d = h \frac{pY^e}{r}, \quad (1.1.16)$$

gdzie $h > 0$ jest parametrem reakcji.

Przyjęty warunek równowagi na rynku pieniężnym (1.1.15) oznacza, że w dowolnym momencie nominalna stopa procentowa r dostosowuje się do oczekiwanego nominalnego popytu finalnego pY^e w taki sposób, że popyt na pieniądź (1.1.16) rośnie wykładniczo i jest identyczny z podażą pieniądza M . Ze wzoru (1.1.16) i równości $M^d = M$ wynika, że

$$r = h \frac{pY^e}{M}, \quad (1.1.17)$$

gdzie M rośnie wykładniczo, zgodnie z zależnością (1.1.14).

Opisany powyżej sposób kształtowania się stopy procentowej również odróżnia prezentowany model KMG od jego wcześniejszych wersji. Różnica polega na tym, że we wcześniejszych modelach KMG funkcja popytu na pieniądź była funkcją liniową i – co ważniejsze – opisywała zależność popytu na pieniądź od oczekiwanego popytu na rynku towarów oraz od odchylenia bieżącej stopy procentowej r od, z góry ustalonej „normalnej” stopy procentowej r_o (Chiarella i in., 2013, s. 247)²¹. Ta na pierwszy rzut oka stosunkowo niewielka różnica ma daleko idące konsekwencje.

²¹ Funkcja popytu na pieniądź w pracach Chiarelli i in. ma postać $M^d = h_1 pY^e + h_2 pK(r_o - r)$, gdzie r jest bieżącą nominalną stopą procentową, a r_o z góry ustaloną „normalną” stopą procentową.

Wynikają one z tego, że w stanie stacjonarnym odchylenie $r_o - r$ przyjmuje wartość zero, co powoduje, że w funkcji popytu na pieniądź znika stopa procentowa jako zmienna determinująca popyt na pieniądź. Jest to wątpliwe z ekonomicznego punktu widzenia²². Rozpatrywanie funkcji popytu w postaci (1.1.16) zachowuje wpływ stopy procentowej na popyt na pieniądź także w stanie stacjonarnym. Co więcej, wartość stopy procentowej w stanie stacjonarnym staje się wielkością endogeniczną, zależną od wszystkich parametrów modelu.

1.1.5. Determinanty produkcji i dynamika zapasów

Żeby przeciwdziałać trudnościom z zachowaniem ciągłości sprzedaży spowodowanej zbyt niskimi zapasami lub zmniejszeniu przychodów będących konsekwencją zbyt wysokich zapasów, producenci dążą do utrzymywania pewnego pożądanego stosunku zapasów do oczekiwanego popytu. W modelu KMG dążenie producentów wyraża równanie:

$$N^d = \beta_{N^d} Y^e, \quad (1.1.18)$$

w którym pożądaný poziom zapasów w ujęciu realnym N^d jest proporcjonalny do oczekiwanej realnej sprzedaży (oczekiwanego realnego popytu) Y^e , ze współczynnikiem $\beta_{N^d} > 0$. Dynamikę oczekiwanego popytu Y^e opisuje równanie (1.1.9).

Zmiana rzeczywistego poziomu zapasów w ujęciu realnym $\dot{N}$ jest różnicą między realną produkcją Y a realnym popytem (sprzedażą) Y^d :

$$\dot{N} = Y - Y^d, \quad (1.1.19)$$

gdzie Y^d spełnia równanie (1.1.1).

Zakładamy, że na bieżącą wielkość realnej produkcji Y , jaką producenci decydują się wytworzyć, mają wpływ trzy czynniki: wielkość realnego popytu oczekiwana na dany moment Y^e , oczekiwana zmiana realnego popytu w przyszłości $\dot{Y}^e$ (wynikająca z równania (1.1.9)) oraz odchylenie realnej wielkości zapasów od ich pożądanego poziomu $N^d - N$. Założenie to odzwierciedla następujące równanie behawioralne:

$$Y = Y^e + \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N), \quad (1.1.20)$$

gdzie, zgodnie z zależnością (1.1.9), $\dot{Y}^e = Y^e (\hat{\omega} + \beta_{y^e} (Y^d - Y^e))$, a $\beta_n, \beta_z > 0$ to parametry reakcji.

Równanie (1.1.20) również jest ulepszoną wersją swojego odpowiednika z wcześniejszych wersji modelu KMG. W modelu przedstawionym przez Chia-

²² Chiarella i in. (2000, s. 279) przyznają, że uzależnienie popytu na pieniądź od odchylenia stóp procentowych $r_o - r$ zostało wprowadzone w celu ułatwienia analizy modelu.

rellę i in. (2013, s. 247) wielkość produkcji kształtuje się zgodnie z równaniem $Y = Y^e + nN^d + \beta_n(N^d - N)$, które jest interpretowane w ten sposób, że produkcja Y ma na celu zaspokojenie oczekiwanego popytu Y^e i dostosowanie zapasów do poziomu $Z = nN^d + \beta_n(N^d - N)$. Czynniki nN^d , który pojawia się w tym równaniu, nie ma wyraźnego uzasadnienia ekonomicznego i prawdopodobnie został wprowadzony ze względów „technicznych”, aby w stanie stacjonarnym zapasy rosły ze stopą wzrostu n . Wprowadzenie we wzorze (1.1.20) składnika $\beta_n \dot{Y}^e$ również zapewnia wzrost zapasów w stanie stacjonarnym ze stopą n , ale wydaje się bardziej uzasadnione z ekonomicznego punktu widzenia.

1.1.6. Ograniczenia produkcji przez zasoby pracy i majątku trwałego

Zakładamy, że decyzje produkcyjne podejmowane zgodnie z równaniem (1.1.20) są możliwe do zrealizowania z punktu widzenia zdolności produkcyjnych gospodarki zależnych od technologii produkcji oraz od zasobów kapitału rzeczowego i podaży pracy. Przyjmujemy, że nakłady kapitału rzeczowego i pracy konieczne do wytworzenia określonej wielkości produkcji są komplementarne (brak możliwości ich substytucji). Technologię produkcji opisują dwa współczynniki: współczynnik potencjalnej efektywności kapitału rzeczowego y^p i współczynnik wydajności pracy x . Współczynnik y^p determinuje przy danym zasobie kapitału rzeczowego maksymalną produkcję Y^p możliwą do uzyskania pod warunkiem dostatecznej podaży pracy. Produkcja ta, nazywana produkcją potencjalną²³, jest wyrażona równaniem $Y^p = y^p K$. Ograniczenie produkcji poprzez zasoby kapitału rzeczowego ma więc postać:

$$Y \leq Y^p = y^p K. \quad (1.1.21)$$

Ograniczenie to ulega osłabieniu, gdy na skutek wzrostu inwestycji rośnie kapitał rzeczowy K . Stopień wykorzystania istniejącego kapitału rzeczowego mierzy wskaźnik wykorzystania potencjału produkcyjnego przedstawiający stosunek produkcji Y do produkcji potencjalnej:

$$u = \frac{Y}{Y^p}. \quad (1.1.22)$$

Przy danym Y^p decyzja o wielkości produkcji podejmowana zgodnie z równaniem (1.1.20) determinuje wartość wskaźnika u . Przyjmujemy, że istnieje pewna wartość tego wskaźnika u^0 ($0 < u^0 < 1$) nazywana naturalnym poziomem wykorzy-

²³ Produkcja potencjalna jest to wielkość produkcji, którą wytworzyłaby gospodarka, gdyby wszystkie czynniki produkcji zostały w pełni wykorzystane (Begg i in., 2000, s. 4).

stania potencjału produkcyjnego, której przekroczenie staje się jednym z czynników wzrostu cen, czyli inflacji opisanej równaniem (1.1.5). Zgodnie z tym równaniem przedsiębiorstwa, których produkcja staje się bliska potencjalnej, mając z tego powodu ograniczone perspektywy szybkiego wzrostu produkcji, są bardziej skłonne do podnoszenia cen wytwarzanych produktów.

O podaży pracy zakładamy, że jest stała w czasie i równa $\bar{L}$. Zakładamy również, że popyt na pracę L^d nigdy nie przekracza podaży $\bar{L}$ i tym samym jest równy wielkości zatrudnienia. Zatrudnienie jest proporcjonalne do wielkości produkcji, co wyraża równanie:

$$L^d = \frac{1}{x} Y \leq \bar{L}, \quad (1.1.23)$$

gdzie $x = Y/L^d$ oznacza wydajność pracy, a $1/x$ – pracochłonność produkcji. (Zakładamy, że w każdym momencie $L^d \leq \bar{L}$). Przekształcając wzór (1.1.23), dostajemy ograniczenie produkcji przez podaż efektywnej pracy $x\bar{L}$:

$$Y = xL^d \leq x\bar{L}. \quad (1.1.24)$$

Z upływem czasu ograniczenie to ulega osłabieniu w rezultacie rosnącej wykładniczo wydajności pracy x , ze stopą wzrostu $n = \dot{x}/x$.

Odpowiednikiem wskaźnika wykorzystania potencjału produkcyjnego (kapitału rzeczowego) u w odniesieniu do podaży pracy jest stopa zatrudnienia:

$$V = \frac{L^d}{\bar{L}}. \quad (1.1.25)$$

Zakładamy, że istnieje poziom stopy zatrudnienia V^o ($0 < V^o < 1$) nazywany naturalną stopą zatrudnienia, której przekroczenie jest jednym z czynników wpływających na wzrost płac nominalnych, co zostało uwzględnione w równaniu (1.1.4).

1.1.7. Równość inwestycji i oszczędności

Opisując konsumpcję sektora prywatnego C oraz wydatki sektora publicznego na dobra i usługi G , wskazaliśmy od razu źródła ich finansowania. W wypadku inwestycji sektora prywatnego $I = \dot{K} + \delta K$ skupiliśmy się na równaniu behawioralnym (1.1.8):

$$\dot{K} = i_1(\rho^e - \xi - (r - \pi^e))K + i_2(u - u^o)K + \hat{Y}^e K,$$

które przedstawia czynniki determinujące decyzję o inwestycjach netto $\dot{K}$, ale nie wskazuje źródeł ich finansowania. Domyślnie inwestycje te mogą być finansowa-

ne zarówno z zysków przedsiębiorstw (po ich wcześniejszym opodatkowaniu), jak i z kredytów inwestycyjnych. Nie jest to jednak opisane żadnymi równaniami modelu KMG prezentowanego w tym rozdziale²⁴. Poniżej pokażemy, że w prezentowanym modelu spełnione jest standardowe równanie opisujące równość inwestycji i oszczędności, zgodnie z którym na koniec każdego okresu wartość nakładów inwestycyjnych netto (a więc z pominięciem nakładów odtworzeniowych) jest równa sumie oszczędności sektora prywatnego i oszczędności rządu (zwykle ujemnych) zgromadzonych w danym okresie. Wyprowadzoną równość oszczędności i inwestycji (w ujęciu realnym) można traktować jako równość pokazującą źródła finansowania inwestycji *ex post*.

W celu sformułowania powyższej równości zdefiniujmy całkowite oszczędności krajowe S jako sumę oszczędności sektora prywatnego S_p oraz sektora rządowego S_g :

$$S = S_p + S_g. \quad (1.1.26)$$

Z równania konsumpcji (1.1.2) wynika, że pracownicy najemni nie oszczędzają, gdyż wszystkie opodatkowane dochody z pracy wydają natychmiast na konsumpcję. Ich oszczędności są zatem zerowe. W wypadku właścicieli kapitału pomijamy z kolei ich konsumpcję, przyjmując, że całość opodatkowanych dochodów z kapitału rzeczowego i z obligacji przeznaczają na oszczędności. Takie założenie jest często spotykane w literaturze przedmiotu (Charpe i in., 2011, s. 54; Kaldor, 1971, s. 223). Tak więc oszczędności sektora prywatnego S_p wyraża równanie:

$$S_p = (1 - \tau_c) \left(\rho K + \frac{rB}{p} \right). \quad (1.1.27)$$

Oszczędności rządowe S_g (deficyt rządowy w wypadku ich ujemnej wartości) to różnica między wpływami z podatków a wydatkami na zaspokojenie popytu sektora rządowego powiększonymi o koszt obsługi długu publicznego, czyli o odsetki od obligacji:

$$S_g = T - \left(G + \frac{rB}{p} \right). \quad (1.1.28)$$

W punkcie 1.1.2 zdefiniowaliśmy popyt inwestycyjny (inwestycje brutto) jako sumę $I = \dot{K} + \delta K$, gdzie $\dot{K}$ to inwestycje netto (przyrost kapitału rzeczowego) spełniające równanie behawioralne (1.1.8), a wyrażenie δK to inwestycje restytucyjne, których wartość, równa deprecjacji kapitału rzeczowego, pomniejsza zysk producenta (por. równanie (1.1.10)). W wyniku kolejnych podstawień uzyskujemy, że całkowite inwestycje netto są równe oszczędnościom krajowym, czyli:

²⁴ Równanie pokazujące zyski przedsiębiorstw i kredyty jako źródła finansowania inwestycji pojawi się w wersji modelu KMG prezentowanej w rozdziale drugim.

$$\dot{K} = S. \quad (1.1.29)$$

Wyprowadzenie równania (1.1.29) przebiega następująco.

Po podstawieniu do zależności (1.1.26) równań (1.1.27) i (1.1.28) otrzymujemy:

$$S = (1 - \tau_c) \left(\rho K + \frac{rB}{p} \right) + T - \left(G + \frac{rB}{p} \right). \quad (1.1.30)$$

Zgodnie ze wzorem (1.1.12):

$$T = \tau_w \omega L^d + \tau_c \left(\rho K + \frac{rB}{p} \right).$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do wzoru (1.1.30) dostajemy:

$$S = \left(\rho K + \frac{rB}{p} \right) - \tau_c \left(\rho K + \frac{rB}{p} \right) + \tau_w \omega L^d + \tau_c \left(\rho K + \frac{rB}{p} \right) - \left(G + \frac{rB}{p} \right),$$

a po uproszczeniach:

$$S = \rho K + \tau_w \omega L^d - G. \quad (1.1.31)$$

Rzeczywisty zysk z kapitału rzeczowego w ujęciu realnym opisuje równanie (tabela 1.1):

$$\rho K = Y^d - \omega L^d - \delta K.$$

Równanie (1.1.31) możemy więc zapisać jako:

$$S = Y^d - \omega L^d - \delta K + \tau_w \omega L^d - G. \quad (1.1.32)$$

Zgodnie ze wzorem (1.1.2) $C = (1 - \tau_w) \omega L^d$. Stąd

$$S = Y^d - C - G - \delta K. \quad (1.1.33)$$

Na podstawie wzorów (1.1.1) oraz (1.1.7) zachodzi $Y^d = C + I + G$, gdzie $I = \dot{K} + \delta K$. Stąd

$$\dot{K} = Y^d - C - G - \delta K. \quad (1.1.34)$$

Z zależności (1.1.33) i (1.1.34) wynika, że

$$S = \dot{K}.$$

1.1.8. Kompletny układ równań modelu

Wyprowadzenie równości (1.1.29) kończy opis wyjściowego modelu przedstawiony w punktach 1.1.1–1.1.7. Tytułem podsumowania, w tabeli poniżej prezentujemy wszystkie równania modelu, które tworzą pełen obraz funkcjonowania modelowanej gospodarki. W zestawieniu pomijamy równanie (1.1.29), gdyż nie jest ono wykorzystywane w dalszych analizach modelu.

Tabela 1.1. Kompletny układ równań modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza

Lp.	Nazwa zmiennej	Równanie	Numer wzoru
Determinanty popytu			
1	Popyt na produkt	$Y^d = C + I + G$	(1.1.1)
2	Konsumpcja sektora prywatnego	$C = (1 - \tau_w) \omega L^d$	(1.1.2)
3	Popyt na pracę	$L^d = \frac{Y}{x}$	(1.1.23)
4	Stopa wzrostu wydajności pracy	$\hat{x} = n$	
5	Płaca realna i stopa wzrostu płacy realnej	$\omega = p, \quad \hat{\omega} = \hat{w} - \hat{p}$	(1.1.3)
6	Stopa wzrostu płac nominalnych	$\hat{w} = \beta_w (V - V^o) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^e + n$	(1.1.4)
7	Stopa wzrostu cen	$\hat{p} = \beta_p (u - u^o) + \kappa_p (\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p) \pi^e$	(1.1.5)
8	Przyrost oczekiwanej inflacji	$\pi^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e),$ gdzie $\mu - n = \pi^o$	(1.1.6)
9	Stopa zatrudnienia	$V = \frac{L^d}{L}$, gdzie L – podaż pracy (stała w czasie)	(1.1.25)
10	Wskaźnik wykorzystania potencjału produkcyjnego	$u = \frac{Y}{Y^p}$	(1.1.22)
11	Produkcja potencjalna	$Y^p = y^p K$	(1.1.21)
12	Przyrost kapitału rzeczowego	$\dot{K} = i_1 (\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) K + i_2 (u - u^o) K + \hat{Y}^e K$	(1.1.8)
13	Oczekiwana realna stopa zysku z kapitału rzeczowego Rzeczywista realna stopa zysku z kapitału rzeczowego	$\rho^e = \frac{Y^e - \omega L^d - \delta K}{K}$ $\rho = \frac{Y^d - \omega L^d - \delta K}{K}$	(1.1.10)
14	Stopa wzrostu oczekiwanego popytu	$\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$	(1.1.9)
15	Popyt inwestycyjny	$I = \dot{K} + \delta K$	(1.1.7)

cd. tabeli 1.1

Lp.	Nazwa zmiennej	Równanie	Numer wzoru
Produkcja i zapasy			
16	Produkcja	$Y = Y^e + Z,$ $Y = Y^e + \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N)$	(1.1.20)
17	Produkcja przeznaczona na zapasy	$Z = \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N)$	
18	Pożądany poziom zapasów	$N^d = \beta_{N^d} Y^e$	(1.1.18)
19	Zmiana rzeczywistego poziomu zapasów	$\dot{N} = Y - Y^d$	(1.1.19)
Rynek pieniądza			
20	Stopa wzrostu podaży pieniądza	$\hat{M} = \mu$	(1.1.14)
21	Popyt na pieniądz	$M^d = h \frac{pY^e}{r}$	(1.1.16)
22	Równowaga na rynku pieniądza	$M = M^d$	(1.1.15)
23	Nominalna stopa procentowa	$r = h \frac{pY^e}{M}$	(1.1.17)
Budżet państwa			
24	Podatki	$T = \tau_w \omega L^d + \tau_c \left(\rho K + \frac{rB}{p} \right)$	(1.1.12)
25	Popyt sektora rządowego	$G = gK$	(1.1.11)
26	Deficyt budżetowy	$\dot{M} + \dot{B} = pG + rB - pT$	(1.1.13)

1.1.9. Sprzężenia zwrotne

W modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza zaprezentowanym w tym rozdziale, podobnie jak w pierwotnej wersji tego modelu (Chiarella i in., 2000), można wyodrębnić kilka sprzężeń zwrotnych²⁵. Sprzężenia te wpływają m.in. na stabilność gospodarki opisywanej przez model. Według autorów modelu KMG najważniejszymi sprzężeniami zwrotnymi w modelach tego typu są: efekt Keynesa, efekt Mundella, efekt Metzlera, efekt Rose’a i efekt regresywnych oczekiwań. W wyniku autorskich modyfikacji równań zaprezentowanego w niniejszej monografii mode-

²⁵ Sprzężenie zwrotne dodatkowo zachodzi wtedy, gdy skutek podtrzymuje przyczynę, powodując zwykle dalsze narastanie skutku, np. rozwój przemysłu powoduje rozwój nauk technicznych, ten zaś przyspiesza rozwój przemysłu. Sprzężenie zwrotne ujemne działa stabilizująco, powodując, że skutek zjawiska przeciwdziała jego przyczynie, co znajduje szerokie zastosowanie w układach sterowania i stanowi istotę regulacji automatycznej.

$$V = \frac{L^d}{L},$$

$$u = \frac{Y}{Y^p}.$$

Jak wspomniano wyżej, efekt Keynesa zaczyna się od zmiany poziomu cen p . Wzrost poziomu cen p (*ceteris paribus*) w omawianym modelu jest równoznaczny ze spadkiem realnego salda pieniężnego M/p , co skutkuje wzrostem nominalnej stopy procentowej r . To zjawisko wynika z przyjętego założenia równowagi na rynku pieniądza i postaci równania równowagi (1.1.15). Wzrost nominalnej stopy procentowej r (*ceteris paribus*) obniża realny popyt inwestycyjny I . Siłę reakcji realnego popytu inwestycyjnego na zmianę nominalnej stopy procentowej określa parametr reakcji $i_1 > 0$. Spadek realnego popytu inwestycyjnego I (*ceteris paribus*) skutkuje zmniejszeniem realnego popytu całkowitego Y^d ²⁶. Realna produkcja Y zależy dodatnio od całkowitego realnego popytu Y^d . Jeśli spadek całkowitego realnego popytu Y^d doprowadzi do sytuacji, w której oczekiwany realny popyt będzie niższy niż całkowity realny popyt ($Y^d < Y^e$), to realna produkcja Y zmaleje. Siłę reakcji realnej produkcji na zmianę całkowitego realnego popytu określa parametr reakcji $\beta_{y^e} > 0$. Spadek wielkości produkcji bezpośrednio wpływa na zmniejszenie zatrudnienia V i wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej u . Malejąca stopa zatrudnienia V ma negatywny wpływ na płace nominalne w . Siłę reakcji płac nominalnych na zmianę stopy zatrudnienia określa parametr reakcji $\beta_w > 0$. Natomiast wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnej u i stopa wzrostu płac nominalnych $\hat{w}$ wpływają pozytywnie na poziom rzeczywistej stopy inflacji $\hat{p}$. Oznacza to, że odpowiednio duży spadek ich wartości prowadzi do ujemnej stopy wzrostu cen, a w konsekwencji do zmniejszenia poziomu cen p i do zamknięcia pętli. Zatem efekt Keynesa jest sprzężeniem zwrotnym ujemnym (stabilizującym). W modelu KMG odpowiednie wartości parametrów reakcji $i_1, \beta_p, \kappa_p, \beta_{y^e}, \beta_w$ (rysunek 1.1) mogą zatem stabilizować poziom cen, a także przyczyniać się do stabilizacji poziomów innych zmiennych i całej gospodarki.

Przedstawiony powyżej efekt Keynesa może być wzmocniony lub osłabiony przez wprowadzone autorskie modyfikacje równań. Wzmocnienie lub osłabienie tego efektu powstaje na skutek uzyskania w autorskiej wersji modelu nowego kanału wpływu oczekiwań dotyczących wielkości popytu na wielkość produkcji (rysunek 1.1).

Poniżej przedstawiono, jak wprowadzone modyfikacje wpłynęły na efekt Keynesa.

²⁶ W wyniku wzrostu poziomu cen zmniejsza się wartość płacy realnej ω . Spadek wartości płacy realnej skutkuje zmniejszeniu wielkości konsumpcji prywatnej C . W konsekwencji zmniejszy się całkowity popyt Y^d .

W nowej wersji modelu równanie produkcji ma postać:

$$Y = Y^e + \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N),$$

gdzie $\dot{Y}^e = \hat{\omega} Y^e + \beta_{y^e} (Y^d - Y^e)$.

W wersji pierwotnej odpowiedniki powyższych równań miały postać:

$$Y = Y^e + nN^d + \beta_n (N^d - N).$$

W oryginalnym modelu przyrost poziomu produkcji pod wpływem zmiany oczekiwanego popytu jest równy:

$$\frac{\partial Y}{\partial Y^e} = 1 + n,$$

a w nowej wersji modelu:

$$\frac{\partial Y}{\partial Y^e} = 1 + \beta_z (\hat{\omega} - \beta_{y^e}).$$

Z tego wzoru oraz z założenia $\beta_z > 0$ wynika, że jeśli $\hat{\omega} > \beta_{y^e}$, to zmiana produkcji pod wpływem zmiany oczekiwanego popytu w nowej wersji modelu może być większa niż w oryginalnym modelu KMG dla odpowiednio dużej wartości parametru reakcji β_z . Natomiast jeśli $\hat{\omega} \leq \beta_{y^e}$, to reakcja produkcji na zmianę oczekiwanego popytu jest zawsze mniejsza niż w oryginalnym modelu, niezależnie od wielkości parametru reakcji β_z . A więc wniosek dotyczący wpływu modyfikacji równań na efekt Keynesa zależy od wartości parametrów reakcji β_{y^e} oraz β_z . Efekt Keynesa w nowej wersji modelu KMG jest silniejszy, gdy wartość parametru β_z jest odpowiednio duża, a wartość parametru β_{y^e} jest odpowiednio mała.

Drugim sprzężeniem zwrotnym jest tzw. **efekt Rose'a**, nazywany również efektem płac realnych (Rose, 1967). Efekt ten jest związany z wpływem zmiany poziomu płac realnych ω na stabilność gospodarki. Podobnie jak przy prezentacji efektu Keynesa, aby lepiej zrozumieć oddziaływanie zmiennych, przypomnijmy równania modelu KMG składające się na opis efektu Rose'a (tabela 1.1):

$$\omega = \frac{w}{p},$$

$$C = (1 - \tau_w) \omega L^d,$$

$$\hat{w} = \beta_w (V - V^o) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^e + n,$$

$$\hat{p} = \beta_p (u - u^o) + \kappa_p (\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p) \pi^e,$$

$$I = i_1 (\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) K + i_2 (u - u^o) K + \hat{Y}^e K + \delta K,$$

$$\rho^e = \frac{Y^e - \omega L^d - \delta K}{K},$$

$$Y^d = C + I + G,$$

$$u = \frac{Y}{Y^p},$$

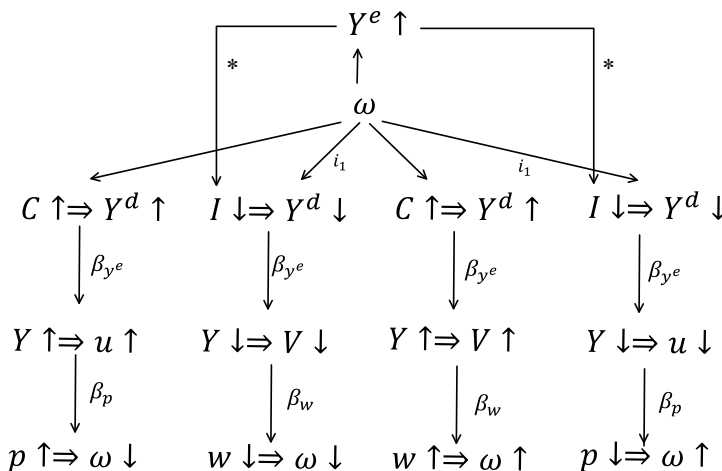
$$Y = Y^e + \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N),$$

$$\dot{Y}^e = \hat{\omega} Y^e + \beta_{y^e} (Y^d - Y^e),$$

$$L^d = \frac{1}{x} Y,$$

$$V = \frac{L^d}{L}.$$

Efekt Rose'a (rysunek 1.2) zaczyna się od zmiany poziomu płac realnych ω (*ceteris paribus*). Wzrost ten wpływa na realną konsumpcję sektora prywatnego C . Zmiana ω poprzez zmianę oczekiwanej stopy zysku z kapitału ρ^e wpływa także na popyt inwestycyjny sektora prywatnego I . Z postaci równań modelu KMG wynika, że możliwe są cztery różne scenariusze wpływu zmiany poziomu płac realnych ω na wartości zmiennych modelu, które opisano poniżej.



Rysunek 1.2. Efekt Rose'a. Symbolem * oznaczono występujące w nowej wersji modelu KMG dodatkowe kanały wpływu oczekiwanego popytu na popyt inwestycyjny

Scenariusz 1. Wzrost płac realnych ω (*ceteris paribus*) zwiększa konsumpcję sektora prywatnego C , co prowadzi do wzrostu zagregowanego popytu Y^d , a w konse-

kwencji do wzrostu produkcji Y . Wzrost produkcji Y zwiększa natychmiast stopień wykorzystania mocy produkcyjnych u , którego skutkiem jest wzrost poziomu cen p . Płace realne ω są ujemnie zależne od cen, a więc wraz ze wzrostem cen p będą maleć, co zamyka pętlę.

Scenariusz 2. Wzrost płac realnych ω (*ceteris paribus*) spowoduje spadek inwestycji sektora prywatnego I (inwestycje zależą od stopy zwrotu z kapitału rzeczowego, który ujemnie zależy od płac realnych), co przyczynia się do spadku zagregowanego popytu Y^d i produkcji Y , a w konsekwencji do wzrostu bezrobocia i zmniejszenia zatrudnienia V . Malejąca stopa zatrudnienia V powoduje spadek płac nominalnych w , a to prowadzi do spadku płac realnych ω i zamknięcia pętli.

Scenariusz 3. Wzrost płac realnych ω (*ceteris paribus*) wpływa na wzrost konsumpcji sektora prywatnego C , a w konsekwencji na wzrost zagregowanego popytu Y^d i produkcji Y . Wzrost produkcji w modelu prowadzi do spadku stopy bezrobocia (wzrost stopy zatrudnienia V), co z kolei prowadzi do wzrostu płac nominalnych w . Ostatecznie wzrost płac nominalnych w prowadzi do wzrostu płac realnych ω i zamknięcia pętli.

Scenariusz 4. Wzrost płac realnych ω (*ceteris paribus*) powoduje spadek inwestycji I , co przyczynia się do spadku zagregowanego popytu Y^d i zmniejszenia poziomu produkcji Y , a w konsekwencji do zmniejszenia stopnia wykorzystania mocy produkcyjnych u . Obniżenie stopnia wykorzystania mocy produkcyjnych u prowadzi do obniżenia cen p , co w dalszej kolejności oznacza wzrost płac realnych ω i zamknięcie pętli.

W omawianym modelu mogą wystąpić wszystkie cztery powyższe scenariusze, ale to, który z nich będzie najsilniejszy (dominujący), zależy od parametrów reakcji modelu. Scenariusze 1 i 2 stabilizują gospodarkę (sprzężenia zwrotne ujemne), a scenariusze 3 i 4 destabilizują gospodarkę (sprzężenia zwrotne dodatnie).

Na rysunku 1.2 przedstawiono również, które parametry reakcji decydują o sile poszczególnych scenariuszy w efekcie Rose'a. Możemy zauważyć, że jeżeli parametr $i_1 > 0$ będzie odpowiednio mały, to scenariusze 2 i 4 mogą zostać zdominowane przez scenariusze 1 i 3. Dodatkowo, jeśli parametr reakcji $\beta_w > 0$ będzie odpowiednio mały, to scenariusz 1 będzie scenariuszem dominującym, co dalej oznacza, że efekt Rose'a będzie efektem stabilizującym (sprzężenie zwrotne ujemne).

Podobnie jak w efekcie Keynesa, w nowej wersji modelu KMG opisany powyżej efekt Rose'a może zostać wzmocniony lub osłabiony przez wprowadzone modyfikacje. Wzmocnienie lub osłabienie tego efektu powstaje na skutek wprowadzonej zmiany opisu dynamiki oczekiwanego popytu Y^e oraz zmiany opisu popytu inwestycyjnego sektora prywatnego I . Wzrost płac realnych ω wpływa pozytywnie bezpośrednio na stopę wzrostu oczekiwanego popytu Y^e , od której pozytywnie zależy popyt inwestycyjny I (nowy kanał wpływu ω na I oznaczono symbolem $*$, zob. rysunek 1.2). Ten nowy kanał wpływu osłabia scenariusze 2 i 4, a tym samym w no-

wej wersji modelu KMG scenariusze 1 i 3 mogą dominować nad scenariuszami 2 i 4 w porównaniu z oryginalnym modelem KMG przy tych samych wartościach parametrów reakcji.

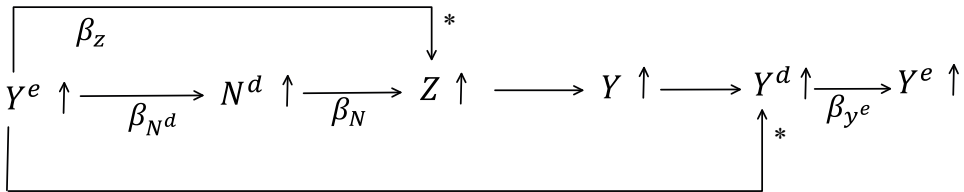
Kolejnym, trzecim sprzężeniem zwrotnym jest **proces Metzlera** sprzedaży/regulacji zapasów. Proces ten opisuje sprzężenia zwrotne powiązane z oczekiwanym popytem i poziomem zapasów. Równania bezpośrednio składające się na opis tego efektu są następujące (tabela 1.1):

$$\begin{aligned}
 Y &= Y^e + Z, \\
 Z &= \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N), \\
 \dot{Y}^e &= \hat{\omega} Y^e + \beta_{y^e} (Y^d - Y^e), \\
 N^d &= \beta_{N^d} Y^e, \\
 \dot{N} &= Y - Y^d, \\
 \hat{w} &= \beta_w (V - V^o) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^e + n, \\
 L^d &= \frac{1}{x} Y, \\
 V &= \frac{L^d}{L}, \\
 I &= i_1 (\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) K + i_2 (u - u^o) K + \hat{Y}^e K + \delta K, \\
 \rho^e &= \frac{Y^e - \omega L^d - \delta K}{K}.
 \end{aligned}$$

Proces sprzedaży/regulacji zapasów Metzlera jest podzielony na trzy pętle. Pierwsza z nich (rysunek 1.3) zaczyna się od wzrostu oczekiwanego realnego popytu Y^e (*ceteris paribus*), który wpływa na wzrost realnego popytu na zapasy N^d . Jeśli realny popyt na zapasy N^d jest większy od realnej podaży zapasów, to rośnie realny poziom produkcji przeznaczonej na zapasy Z , co bezpośrednio wpływa na większą realną produkcję Y . Wzrost produkcji Y wpływa pozytywnie na całkowity popyt Y^d . Ten wpływ produkcji na całkowity popyt Y^d wynika zasadniczo z dwóch powodów:

- 1) wzrost płac nominalnych w (z powodu wyższego zatrudnienia V spowodowanego wzrostem produkcji Y) przyczynia się do wzrostu wydatków konsumpcyjnych, co implikuje wzrost całkowitego popytu Y^d ,
- 2) wzrost produkcji wpływa na wzrost wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej $u = Y / Y^p$, co z kolei zwiększa popyt inwestycyjny sektora prywatnego I , a więc także zwiększa całkowity popyt Y^d .

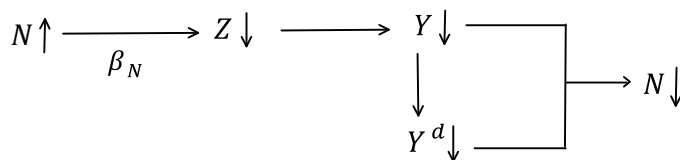
W konsekwencji, gdy rośnie poziom całkowitego popytu Y^d , rosną oczekiwania dotyczące wielkości przyszłego popytu Y^e , co kończy pętlę.



Rysunek 1.3. Proces Metzlera sprzedaży/regulacji zapasów – pętla 1. Symbolem * oznaczono dodatkowe kanały wpływu oczekiwanego popytu na produkcję przeznaczoną na zapasy oraz na całkowity realny popyt występujące w nowej wersji modelu KMG

Opisane pierwsze sprzężenie jest sprzężeniem destabilizującym gospodarkę (sprężenie zwrotne dodatnie), ponieważ wzrost oczekiwanego popytu Y^e powoduje jeszcze większy wzrost oczekiwanego popytu Y^e . Siła wpływu tego destabilizującego efektu zależy od wartości parametrów reakcji β_{N^d} , β_N , β_Z , β_w , i_1 i β_{Y^e} .

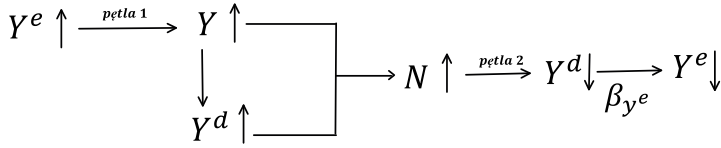
Druga pętla zaczyna się od zmiany poziomu realnych zapasów N (*ceteris paribus*). Wzrost ten zmniejsza poziom inwestycji przeznaczonych na zapasy Z , czego skutkiem jest mniejsza realna produkcja Y . Gdy maleje realna produkcja Y , to maleje całkowity realny popyt Y^d (wynika to z malejącej stopy zatrudnienia V oraz malejącego wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej u). Jeśli całkowity realny popyt Y^d będzie malał wolniej niż produkcja Y , to podaż realnych zapasów N zmniejszy się, co kończy pętlę.



Rysunek 1.4. Proces Metzlera sprzedaży/regulacji zapasów – pętla 2

Opisane drugie sprzężenie zwrotne jest sprzężeniem stabilizującym gospodarkę (sprężenie zwrotne ujemne).

Trzecia pętla (rysunek 1.5) łączy dwie wcześniejsze pętle (pętlę 1 i pętlę 2). Zgodnie z pierwszą pętlą wzrost oczekiwanego popytu Y^e pozytywnie wpływa na poziom produkcji Y . Z kolei wzrost produkcji Y zwiększa zagregowany popyt Y^d i jeśli produkcja będzie rosła szybciej niż zagregowany popyt ($\Delta Y > \Delta Y^d$), to wzrośnie realna podaż zapasów N .



Rysunek 1.5. Proces Metzlera sprzedaży/regulacji zapasów – pętla 3

Wzrost realnej podaży zapasów zmniejszy całkowity realny popyt Y^d (pętla 2), a w konsekwencji zmniejszy się poziom oczekiwanego popytu Y^e , co kończy trzecią pętlę. Trzecia pętla ma potencjał stabilizujący gospodarkę.

W pierwszej pętli możemy zauważyć, że wzrost oczekiwanego realnego popytu Y^e bezpośrednio wpływa na popyt na zapasy N^d , na całkowity realny popyt Y^d oraz na produkcję przeznaczoną na zapasy Z , a zmiany te wywołują zmiany w oczekiwanym realnym popycie Y^e . Te dwa ostatnie kanały są wynikiem wprowadzonych modyfikacji modelu KMG. Siła wpływu tych dwóch nowych kanałów na efekt Metzlera zależy od wartości parametrów reakcji β_Z oraz β_{y^e} . Z założenia wartości tych parametrów są dodatnie, więc wprowadzone modyfikacje wzmacniają opisywany stabilizujący efekt Metzlera.

Czwartym sprzężeniem zwrotnym (rysunek 1.6) jest tzw. **efekt Mundella** (Chiarrella i Flaschel, 1996). Efekt ten jest związany ze zmianą oczekiwanego stopy inflacji π^e . Równania powiązane z tym efektem to (tabela 1.1):

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \bar{\pi} - \pi^e),$$

$$I = i_1 (\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) K + i_2 (u - u^o) K + \hat{Y}^e K + \delta K,$$

$$\rho^e = \frac{Y^e - \omega L^d - \delta K}{K},$$

$$Y^d = C + I + G,$$

$$Y = Y^e + \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N),$$

$$\dot{Y}^e = \hat{\omega} Y^e + \beta_{y^e} (Y^d - Y^e),$$

$$u = \frac{Y}{Y^p},$$

$$\hat{p} = \beta_p (u - u^o) + \kappa_p (\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p) \pi^e.$$

Wzrost oczekiwanej stopy inflacji π^e (*ceteris paribus*) pozytywnie wpływa na poziom popytu inwestycyjnego sektora prywatnego I . Z kolei popyt inwestycyjny I wpływa pozytywnie na całkowity realny popyt Y^d , a tym samym na realną produkcję Y . Wzrost realnej produkcji Y zwiększa stopień wykorzystania mocy produkcyj-

$$\pi^e \uparrow \xrightarrow{i_1} I \uparrow \longrightarrow Y^d \uparrow \xrightarrow{\beta_{y^e}} Y \uparrow \longrightarrow u \uparrow \xrightarrow{\beta_p} \hat{p} \uparrow \xrightarrow{\beta_{\pi^e} \alpha} \pi^e \uparrow$$

Rysunek 1.6. Efekt Mundella

nej u , który pozytywnie wpływa na stopę inflacji $\hat{p}$. Wzrost stopy inflacji $\hat{p}$ powoduje wzrost oczekiwań inflacyjnych π^e i kończy pętlę.

Opisana pętla sprzężenia zwrotnego (rysunek 1.6) implikuje pozytywną zależność oczekiwanej stopy inflacji od niej samej. Oznacza to, że efekt Mundella jest efektem destabilizacyjnym i może negatywnie wpływać na stabilność gospodarki. Jak to zobrazowano na rysunku, wystarczy, aby jeden z parametrów $i_1, \beta_{y^e}, \beta_p, \beta_{\pi^e}, \alpha > 0$ miał odpowiednio małą wartość, by efekt Mundella nie wystąpił.

Kolejnym ważnym sprzężeniem zwrotnym w modelu KMG jest tzw. **efekt regresywnych oczekiwań**. Ten efekt jest niemal trywialny, wynika bezpośrednio z przyjętego równania adaptacyjnego opisującego zmianę oczekiwanej inflacji (wzór (1.1.6)):

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \pi^o - \pi^e).$$

Wzrost oczekiwań inflacyjnych π^e (*ceteris paribus*) wywiera negatywny wpływ na ich dalszą zmianę (rysunek 1.7). Jeśli oczekiwania inflacyjne przekraczają liniową kombinację rzeczywistej inflacji i celu inflacyjnego, tj. $\pi^e > \alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \pi^o$, zaczynają spadać. Efekt ten jest efektem stabilizującym. Parametry odpowiadające za efekt regresywnych oczekiwań to $\beta_{\pi^e} > 0$ i $\alpha > 0$.

$$\pi^e \uparrow \xrightarrow{\beta_{\pi^e}(1 - \alpha)} \pi^e \downarrow$$

Rysunek 1.7. Efekt regresywnych oczekiwań

Uwaga. Wprowadzone modyfikacje równań modelu bezpośrednio nie wpływają na efekt Mundella i efekt regresywnych oczekiwań.

W nowej wersji modelu KMG, dzięki wprowadzonym autorskim modyfikacjom, oprócz wzmocnienia lub osłabienia powyższych typowych dla modeli KMG sprzężeń zwrotnych, pojawiają się kolejne sprzężenia zwrotne istotne z punktu widzenia stabilnego wzrostu gospodarki. Pierwszym z nich jest **efekt wzrostu oczekiwanego popytu**. Efekt ten zaczyna się od zmiany oczekiwanego realnego popytu Y^e (rysunek 1.8).

$$Y^e \uparrow \longrightarrow I \uparrow \longrightarrow Y^d \uparrow \xrightarrow{\beta_{y^e}} Y^e \uparrow$$

Rysunek 1.8. Efekt wzrostu oczekiwanego popytu

Równania, które są powiązane z efektem wzrostu oczekiwanego popytu (tabela 1.1), to:

$$\begin{aligned} I &= i_1(\rho^e - \xi - (r - \pi^e))K + i_2(u - u^o)K + \hat{Y}^e K + \delta K, \\ \rho^e &= \frac{Y^e - \omega L^d - \delta K}{K}, \\ Y^d &= C + I + G, \\ \dot{Y}^e &= \hat{\omega} \cdot Y^e + \beta_{y^e}(Y^d - Y^e). \end{aligned}$$

Wzrost oczekiwanego realnego popytu Y^e (*ceteris paribus*) zwiększa popyt inwestycyjny sektora prywatnego I , który z kolei zwiększa całkowity realny popyt Y^d . Wzrost całkowitego realnego popytu (*ceteris paribus*) wpływa pozytywnie na przyrost oczekiwanego realnego popytu Y^e . Wpływ całkowitego realnego popytu na przyrost oczekiwanego realnego popytu zależy od wartości parametru reakcji β_{y^e} . A więc i cały efekt wzrostu oczekiwanego realnego popytu zależy od tej wartości i ma potencjał destabilizujący. Oznacza to, że w autorskiej wersji modelu KMG odpowiednio duża wartość parametru β_{y^e} może wpływać negatywnie na stabilność całej gospodarki.

Drugim nowym sprzężeniem zwrotnym jest **efekt wzrostu płacy realnej**. Efekt ten zaczyna się od zmiany płacy realnej ω . Powiązane z tym efektem równania to – oprócz czterech wymienionych wyżej – poniższe (tabela 1.1):

$$\begin{aligned} Y &= Y^e + \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n(N^d - N), \\ \dot{Y}^e &= \hat{\omega} Y^e + \beta_{y^e}(Y^d - Y^e), \\ u &= \frac{Y}{Y^p}, \\ \hat{p} &= \beta_p(u - u^o) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e, \\ \omega &= \frac{w}{p}, \\ C &= (1 - \tau_w)\omega L^d. \end{aligned}$$

Wzrost płacy realnej ω (*ceteris paribus*) wpływa pozytywnie na przyrost oczekiwanego realnego popytu $\dot{Y}^e$ oraz na realną konsumpcję sektora prywatnego C . Wzrost oczekiwanego popytu Y^e wpływa pozytywnie na popyt inwestycyjny I . Wzrost realnej konsumpcji C i popytu inwestycyjnego I bezpośrednio wpływają na realny poziom popytu całkowitego Y^d , który pozytywnie wpływa na realny poziom produkcji Y . W sytuacji gdy rośnie realna produkcja Y , rośnie wartość wskaźnika

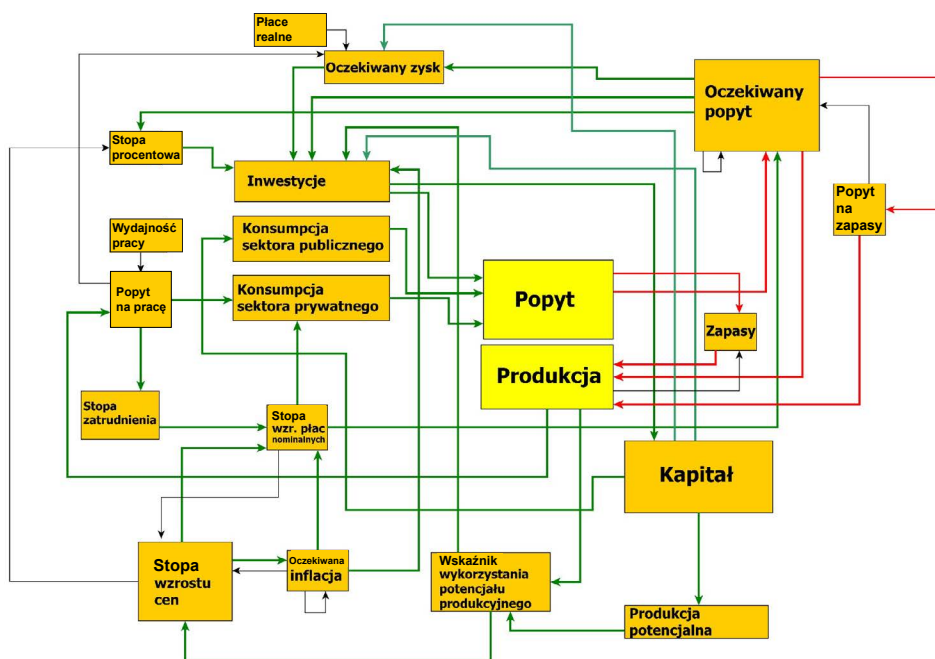
wykorzystania mocy produkcyjnej u , który z kolei pozytywnie wpływa na rzeczywistą stopę inflacji $\hat{p}$. Z kolei wzrost rzeczywistej stopy inflacji $\hat{p}$ oznacza wzrost cen, a w konsekwencji obniżenie się poziomu płacy realnej ω , co kończy pętlę (rysunek 1.9).

$$\omega \uparrow \longrightarrow Y^e \uparrow \longrightarrow I, C \uparrow \longrightarrow Y^d \uparrow \xrightarrow{\beta_{y^e}} Y \uparrow \longrightarrow u \uparrow \xrightarrow{\beta_p} \hat{p} \uparrow \longrightarrow \omega \downarrow$$

Rysunek 1.9. Efekt wzrostu płacy realnej

Efekt wzrostu płacy realnej jest efektem stabilizującym wartość płacy realnej ω i może wpływać pozytywnie na stabilność całej gospodarki. Siła efektu wzrostu płacy realnej zależy od dwóch parametrów reakcji: β_{y^e} oraz β_p .

Przedstawiony powyżej opis istniejących sprzężeń zwrotnych pokazuje, jak bardzo powiązane są ze sobą zmienne modelu. Kompleksową sieć powiązań między zmiennymi ilustruje rysunek 1.10. Sprzężenie stabilizujące jednocześnie może wpływać na siłę któregoś ze sprzężeń destabilizujących, co w konsekwencji może, ale nie musi, destabilizować cały model. Na przykład, stabilizujący efekt Keynesa (wzrost cen wpływa na spadek cen) może prowadzić do powstania destabilizują-



Rysunek 1.10. Schemat powiązań między zmiennymi w autorskiej wersji modelu KMG

cego lub stabilizującego efektu Rose’a przy odpowiednich wartościach parametrów modelu (spadek cen wpływa na wzrost płac realnych, co może dalej wpłynąć na wzrost/spadek płac realnych).

1.2. Postać intensywna modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza

W tym podrozdziale zajmiemy się odpowiedzią na pytanie, czy w gospodarce opisaną przedstawionym powyżej modelem możliwy jest równomierny wzrost wszystkich zmiennych ilościowych takich jak kapitał trwały, produkcja, konsumpcja, inwestycje itd. Ponieważ w procesie równomiernego wzrostu proporcje między zmiennymi modelu pozostają stałe, aby odpowiedzieć na postawione pytanie, musimy najpierw sprowadzić oryginalny model do modelu w postaci intensywnej, którego zmienne przedstawiają proporcje między zmiennymi modelu wyjściowego.

W tym celu zdefiniujemy następujące zmienne modelu KMG w postaci intensywnej:

- płace realne ωL^d na jednostkę produkcji: $U = \frac{\omega L^d}{Y}$,
- pracochłonność pełnego zatrudnienia (stosunek efektywnej pracy xL do kapitału): $l = \frac{xL}{K}$,
- realna podaż pieniądza $\frac{M}{p}$ na jednostkę kapitału: $m = \frac{M}{pK}$,
- oczekiwany popyt Y^e na jednostkę kapitału: $y^e = \frac{Y^e}{K}$,
- wielkość zapasów N na jednostkę kapitału: $v = \frac{N}{K}$,
- stosunek realnej podaży obligacji $\frac{B}{p}$ do wielkości kapitału trwałego: $b = \frac{B}{pK}$,
- oczekiwana stopa inflacji: π^e ,
- całkowity popyt na jednostkę kapitału trwałego: $y^d = \frac{Y^d}{K}$,
- produkcja na jednostkę kapitału trwałego: $y = \frac{Y}{K}$.

1.2.1. Sprowadzenie modelu do postaci intensywnej

Żeby wyprowadzić model KMG w postaci intensywnej, zaczniemy od realnego dochodu z pracy ωL^d na jednostkę produkcji: $U = \omega L^d/Y$. Stosunek Y/L^d to wydajność pracy oznaczana przez x . Stąd $U = \omega/x$, co oznacza, że tempo wzrostu U jest równe:

$$\hat{U} = \hat{\omega} - \hat{x}. \quad (1.2.1)$$

Z definicji płace realne są równe ilorazowi płac nominalnych i poziomu cen ($\omega = w/p$), więc stopa wzrostu płac realnych jest równa różnicy stóp wzrostu płac nominalnych i cen ($\hat{\omega} = \hat{w} - \hat{p}$). Równanie (1.2.1) możemy zatem zapisać jako:

$$\hat{U} = \hat{w} - \hat{p} - \hat{x}. \quad (1.2.2)$$

Równania opisujące stopę wzrostu płac nominalnych oraz stopę inflacji to odpowiednio równania (1.1.4) i (1.1.5):

$$\hat{w} = \beta_w (V - V^o) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^e + n,$$

$$\hat{p} = \beta_p (u - u^o) + \kappa_p (\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p) \pi^e.$$

Rozwiązując powyższy układ równań dla $\hat{w}$ oraz $\hat{p}$, otrzymujemy:

$$\hat{w} = \kappa \left(\beta_w (V - V^o) + \kappa_w \beta_p (u - u^o) \right) + \pi^e + n, \quad (1.2.3)$$

$$\hat{p} = \kappa \left(\kappa_p \beta_w (V - V^o) + \beta_p (u - u^o) \right) + \pi^e, \quad (1.2.4)$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p}$, $\kappa_w \kappa_p \neq 1$.

Po podstawieniu do wzoru (1.2.2) stopy wzrostu: płac nominalnych $\hat{w}$ – wzór (1.2.3), cen $\hat{p}$ – wzór (1.2.6) i wydajności pracy $\hat{x} = n$ po przekształceniach otrzymujemy pierwsze równie modelu intensywnego:

$$\hat{U} = \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V - V^o) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - u^o) \right),$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p}$, $\kappa_w \kappa_p \neq 1$.

Drugim równaniem modelu intensywnego jest równanie opisujące stopę wzrostu pracochłonności pełnego zatrudnienia. Ze wzoru na efektywną podaż pracy na jednostkę kapitału $l = xL/K$ wynika, że:

$$\hat{l} = \hat{x} + \hat{L} - \hat{K}. \quad (1.2.5)$$

Dzieląc obustronnie równanie (1.1.8) przez kapitał rzeczowy K , dostajemy równanie opisujące stopę wzrostu kapitału rzeczowego:

$$\hat{K} = i_1 \left(\rho^e - \xi - (r - \pi^e) \right) + i_2 (u - u^o) + \hat{Y}^e, \quad (1.2.6)$$

gdzie: $\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$, $\rho^e = y^e - Uy - \delta$, $r = \frac{hy^e}{m}$, $u = \frac{y}{y^p}$.

Z założenia, że podaż pracy L jest stała w czasie, mamy $\hat{L} = 0$. Wiemy także, że stopa wzrostu wydajności pracy jest stała: $\hat{x} = n$. Zatem, korzystając z równań (1.2.5) i (1.2.6), otrzymujemy drugie równanie modelu intensywnego:

$$\hat{l} = n - \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) - i_1 (y^e - Uy - \delta - \xi - (r - \pi^e)) - i_2 (u - u^o).$$

Trzecie równanie opisuje stopę wzrostu realnej podaży pieniądza na jednostkę kapitału rzeczowego: $m = M/pK$. Stopa ta spełnia równanie:

$$\hat{m} = \hat{M} - \hat{p} - \hat{K}.$$

Po podstawieniu do tego wzoru równań: $\hat{M} = \mu$, $\hat{K} = n - \hat{l}$ oraz (1.2.4) otrzymujemy trzecie równanie modelu intensywnego:

$$\hat{m} = \mu - \pi^e - n - \kappa \left(\kappa_p \beta_w (V - V^o) + \beta_p (u - u^o) \right) + \hat{l}.$$

Czwarte równanie modelu przedstawia zmianę oczekiwań inflacyjnych (wzór (1.1.6)):

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} \left(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \pi^o - \pi^e \right),$$

gdzie $\hat{p}$ zostało zdefiniowane równaniem (1.2.4).

Piąte równanie modelu intensywnego opisuje dynamikę oczekiwanego popytu na jednostkę kapitału rzeczowego: $y^e = Y^e/K$. Z definicji tej zmiennej mamy:

$$\hat{y}^e = \hat{Y}^e - \hat{K}.$$

Podstawiając do tego wzoru kolejno $\hat{K} = n - \hat{l}$, $\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$, dostajemy piąte równanie modelu intensywnego:

$$\dot{y}^e = y^e \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) - n + \hat{l} \right).$$

Szóste równanie opisuje przyrost zapasów na jednostkę kapitału rzeczowego: $v = N/K$. Żeby wyprowadzić równanie dynamiki zmiennej v , zaczynamy od równania:

$$\dot{v} = \frac{\dot{N}K - N\dot{K}}{K^2} = \frac{\dot{N}}{K} - \frac{N}{K} \cdot \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{N}}{K} - v\hat{K}.$$

Zgodnie z tym, że $\dot{N} = Y - Y^d$, wykorzystując zależności $\hat{K} = n - \hat{l}$, $y = \frac{Y}{K}$ oraz $y^d = \frac{Y^d}{K}$, otrzymujemy szóste równanie modelu intensywnego:

$$\dot{v} = y - y^d - v(n - \hat{l}).$$

Ostatnim, siódmym równaniem modelu w postaci intensywnej jest równanie opisujące realną podaż obligacji na jednostkę kapitału rzeczowego: $b = B/pK$. Definicja zmiennej b implikuje:

$$\dot{b} = \frac{\dot{B}Kp - B(\dot{K}p)}{(Kp)^2} = \frac{\dot{B}}{Kp} - \frac{B}{Kp}(\hat{K} + \hat{p}) = \frac{\dot{B}}{Kp} - b(\hat{K} + \hat{p}).$$

Zgodnie ze wzorami (1.1.13) i (1.1.11), $\dot{B} = pG + rB - pT - \dot{M}$ oraz $G = gK$, zatem mamy:

$$\dot{b} = g + rb - \frac{T}{K} - \frac{\dot{M}}{Kp} - b(\hat{K} + \hat{p}).$$

Podstawiając do tego wzoru $\hat{K} = n - \hat{l}$, $T = \tau_w \omega L^d + \tau_c \left(\rho K + \frac{rB}{p} \right)$ oraz stopę wzrostu cen (1.2.4), otrzymujemy ostatnie, siódme równanie modelu:

$$\begin{aligned} \dot{b} = g + rb - \tau_c (y^d - Uy - \delta + rb) - \tau_w Uy - \mu m + \\ - b \left(n - \hat{l} + \kappa \left(\beta_p (u - u^o) + \kappa_p \beta_w (V - V^o) \right) + \pi^e \right), \end{aligned}$$

gdzie $m = M/pK$.

Z siedmiu wyprowadzonych powyżej równań otrzymujemy następujący układ nieliniowych równań różniczkowych, które opisują dynamikę proporcji między zmiennymi modelu KMG:

$$\dot{U} = U \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p)(V - V^o) - \beta_p (1 - \kappa_w)(u - u^o) \right), \quad (1.2.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{i} = l \left(n - \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) \right) + \\ - l \left(i_1 \left(y^e - Uy - \delta - \xi - \left(\frac{hy^e}{m} - \pi^e \right) \right) - i_2 (u - u^o) \right), \quad (1.2.8) \end{aligned}$$

$$\dot{m} = m(\mu - n - \hat{p} + \hat{l}), \quad (1.2.9)$$

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} \left(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \pi^o - \pi^e \right), \quad (1.2.10)$$

$$\dot{y}^e = y^e \left(\hat{U} + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) + \hat{l} \right), \quad (1.2.11)$$

$$\dot{v} = y - y^d - v(n - \hat{l}), \quad (1.2.12)$$

$$\dot{b} = g + rb - \tau_c(y^d - Uy - \delta + rb) - \tau_w Uy - \mu m - b(n - \hat{l} + \hat{p}), \quad (1.2.13)$$

$$\text{gdzie } \hat{p} = \kappa(\kappa_p \beta_w(V - V^o) + \beta_p(u - u^o)) + \pi^e.$$

Należy podkreślić, że oprócz zmiennych $U, l, m, \pi^e, y^e, v, b$, w tym układzie występują jeszcze dwie dodatkowe zmienne. Są to całkowity popyt na jednostkę kapitału rzeczowego $y^d = Y^d/K$ i produkcja na jednostkę kapitału rzeczowego $y = Y/K$. Żeby stwierdzić współzależności między powyższymi zmiennymi, zauważmy, że zgodnie ze wzorami (1.1.1) i (1.1.20) zmienne Y^d i Y występują w następujących równaniach omawianego modelu KMG:

$$Y^d = C + I + G,$$

$$Y = Y^e + \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n(N^d - N).$$

Dzieląc powyższe równania przez K , otrzymujemy:

$$y^d = \frac{C}{K} + \frac{I}{K} + \frac{G}{K}, \quad (1.2.14)$$

$$y = y^e + \beta_z \frac{\dot{Y}^e}{K} + \beta_n \left(\frac{N^d}{K} - \frac{N}{K} \right), \quad (1.2.15)$$

gdzie $y^e = Y^e/K$.

Podstawiamy równania (1.1.2), (1.1.8) i (1.1.11) do wzoru (1.2.14) oraz równania (1.1.14) i (1.1.19) do wzoru (1.2.15). Otrzymujemy następujący układ dwóch równań liniowych (zmienne y^d i y występują po obu stronach tych równań):

$$\begin{aligned} y^d = & (1 - \tau_w) y U + i_1 \left(y^e - y U - \delta - \xi - \left(\frac{h y^e}{m} - \pi^e \right) \right) + i_2 (u - u^o) + \delta + g + \\ & + \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p)(V - V^o) - \beta_p (1 - \kappa_w)(u - u^o) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right), \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

$$\begin{aligned} y = & y^e + \beta_n \beta_{N^d} y^e - \beta_n v + \\ & + y^e \beta_z \left(\kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p)(V - V^o) - \beta_p (1 - \kappa_w)(u - u^o) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right). \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Ponieważ zmienne y^d i y występują również w równaniach różniczkowych (1.2.7)–(1.2.13), równania (1.2.16)–(1.2.17) muszą być brane pod uwagę w każdej analizie tego układu równań różniczkowych. Oznacza to, że kompletny model

KMG w formie intensywnej składa się nie tylko z równań (1.2.7)–(1.2.13), ale także z równań (1.2.16)–(1.2.17).

1.2.2. Stan stacjonarny modelu w postaci intensywnej

Sprowadzenie modelu KMG do postaci intensywnej umożliwia wyznaczenie jego stanu stacjonarnego, a więc takich proporcji między zmiennymi modelu w postaci wyjściowej, które umożliwiają wzrost wszystkich zmiennych z jednakową stopą wzrostu. Ponieważ w procesie równomiernego wzrostu proporcje między zmiennymi (czyli zmienne modelu w postaci intensywnej) pozostają stałe, wyznaczenie stanu stacjonarnego sprowadza się do rozwiązania zwykłego układu równań, który otrzymujemy z równań (1.2.7)–(1.2.13) i (1.2.16)–(1.2.17) przy założeniu, że pochodne występujące po lewej stronie równań różniczkowych (1.2.7)–(1.2.13) są równe zero. Stan stacjonarny opisuje zatem nieujemny wektor $(\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$, będący rozwiązaniem następującego układu (z uwzględnieniem równań (1.2.16)–(1.2.17)):

$$0 = \beta_w (1 - \kappa_p)(V - V^o) - \beta_p (1 - \kappa_w)(u - u^o), \quad (1.2.18)$$

$$0 = -\beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) - i_1 (\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) - i_2 (u - u^o), \quad (1.2.19)$$

$$0 = \mu - n - \hat{p}, \quad (1.2.20)$$

$$0 = \alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \pi^o - \pi^e, \quad (1.2.21)$$

$$0 = \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right), \quad (1.2.22)$$

$$0 = y - y^d - vn, \quad (1.2.23)$$

$$0 = g + rb - \tau_c (y^d - Uy - \delta + rb) - \tau_w Uy - \mu m - b(n + \hat{p}), \quad (1.2.24)$$

gdzie:

$$\hat{p} = \kappa \left(\kappa_p \beta_w (V - V^o) + \beta_p (u - u^o) \right) + \pi^e,$$

$$V = \frac{y}{l},$$

$$u = \frac{y}{y^p},$$

$$\rho^e = y^e - Uy - \delta.$$

Zgodnie z zależnością (1.2.20) stopa inflacji $\hat{p}$ w stanie stacjonarnym, oznaczona przez $\bar{\pi}$, spełnia równanie:

$$\hat{p} = \bar{\pi} = \mu - n = \pi^o.$$

Podstawiając tę zależność do wzoru (1.2.21), otrzymujemy:

$$0 = \alpha(\mu - n) + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e,$$

co implikuje, że

$$\pi^e = \mu - n = \bar{\pi}.$$

Zatem oczekiwana stopa inflacji i rzeczywista stopa inflacji w stanie stacjonarnym są sobie równe. Równanie (1.2.20) w stanie stacjonarnym ma więc postać:

$$\bar{\pi} = \kappa \left(\kappa_p \beta_w (V - V^o) + \beta_p (u - u^o) \right) + \bar{\pi},$$

gdzie $\kappa > 0$. Stąd

$$\beta_p (u - u^o) = -\kappa_p \beta_w (V - V^o). \quad (1.2.25)$$

Po podstawieniu tej zależności do wzoru (1.2.18) mamy:

$$0 = \beta_w (1 - \kappa_p)(V - V^o) + (1 - \kappa_w) \kappa_p \beta_w (V - V^o),$$

co prowadzi do wyrażenia:

$$\beta_w (V - V^o)(1 - \kappa_w \kappa_p) = 0,$$

gdzie $\beta_w > 0$ i $\kappa_p \kappa_w \neq 1$. Stąd

$$V = V^o. \quad (1.2.26)$$

Oznacza to, że wartość stopy zatrudniania $\bar{V}$ w równowadze jest równa wartości naturalnej stopy zatrudnienia V^o .

Podstawiając równanie (1.2.26) do wzoru (1.2.25), otrzymujemy:

$$u = u^o, \quad (1.2.27)$$

więc wartość wskaźnika wykorzystania potencjału produkcyjnego u w stanie stacjonarnym $\bar{u}$ jest równa jego normatywnej wielkości u^o . Ponieważ $u = y/y^p$ i spełniona jest zależność (1.2.27), możemy wyznaczyć stosunek produkcji do kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym:

$$\bar{y} = u^o y^p, \quad y^p = \text{const}. \quad (1.2.28)$$

Produkcja na jednostkę kapitału w stanie stacjonarnym jest zatem wprost proporcjonalna do produkcji potencjalnej na jednostkę kapitału rzeczowego. Ze wzoru (1.2.28) wynika również, że im wyższy normatywny poziom wskaźnika wykorzy-

stania produkcyjnego, tym wartość produkcji rzeczywistej jest bliższa wartości produkcji potencjalnej na jednostkę kapitału rzeczowego.

Ponieważ $V = y/l$ oraz zachodzą zależności (1.2.26) i (1.2.28), mamy:

$$\bar{l} = \frac{\bar{y}}{\bar{V}}.$$

Po podstawieniu wyrażeń (1.2.26) i (1.2.27) do równania²⁷:

$$\hat{\omega} = \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p)(V - V^o) - \beta_p (1 - \kappa_w)(u - u^o) \right) + n$$

otrzymujemy:

$$\hat{\omega} = n. \quad (1.2.29)$$

Z zależności (1.2.22) dostajemy:

$$y^d = y^e. \quad (1.2.30)$$

Po podstawieniu tego do warunku (1.2.23) mamy:

$$v = \frac{\bar{y} - y^e}{n}. \quad (1.2.31)$$

Podstawiając (1.2.29) i (1.2.31) do (1.2.37), otrzymujemy:

$$\bar{y} = y^e (1 + \beta_z n) + \beta_n \left(\beta_{N^d} y^e - \frac{\bar{y} - y^e}{n} \right).$$

Rozwiązanie tego równania dla y^e prowadzi do wyrażenia:

$$\bar{y}^e = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} \cdot \bar{y}. \quad (1.2.32)$$

Znając wartość oczekiwanego popytu w stanie stacjonarnym $\bar{y}^e$, ze wzorów (1.2.28) i (1.2.31) możemy wyznaczyć stosunek zapasów do kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym:

$$\bar{v} = \frac{u^o y^p - \bar{y}^e}{n}.$$

Równania (1.2.27), (1.2.29), (1.2.30) i (1.2.19) dają:

$$\rho^e = r - \pi^e + \xi. \quad (1.2.33)$$

²⁷ Wzór ten otrzymujemy, podstawiając do wzoru na stopę wzrostu płac realnych $\hat{\omega} = \hat{w} - \hat{p}$ wzory (1.2.3) i (1.2.4).

Wykorzystując powyższy wynik w równaniu (1.2.16), uzyskujemy:

$$\bar{y}^d = (1 - \tau_w) \bar{y} U + \delta + g + n.$$

Z tego równania mamy:

$$U = \frac{\bar{y}^d - (\delta + g + n)}{(1 - \tau_w) \bar{y}}, \quad (1.2.34)$$

gdzie $\delta, g, n, \tau_w = \text{const}$. Równanie to możemy zapisać jako:

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1 - \tau_w) \bar{y}},$$

gdzie $\bar{c} = \bar{y}^d - (\delta + g + n)$ to konsumpcja sektora prywatnego w stosunku do kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym.

Wykorzystując definicję zmiennej $\rho^e = y^e - U y - \delta$ oraz wzory (1.2.28), (1.2.32) i (1.2.34), możemy wyznaczyć oczekiwaną stopę zwrotu z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym:

$$\bar{\rho}^e = \bar{y}^e - \bar{U} \bar{y} - \delta.$$

Ponieważ w stanie stacjonarnym mamy $\bar{y}^e = \bar{y}^d$, otrzymujemy więc $\bar{\rho}^e = \bar{\rho}$. Zatem oczekiwana stopa zwrotu z kapitału rzeczowego i rzeczywista stopa zwrotu z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym są identyczne.

Nominalną stopę procentową w stanie stacjonarnym określa wartość r , która spełnia równanie (1.2.33):

$$\bar{r} = \bar{\rho}^e + \bar{\pi} - \xi.$$

Dalej z intensywnej postaci równania LM równowagi na rynku pieniądza²⁸ otrzymujemy $\bar{m}$:

$$\bar{m} = h \frac{\bar{y}^e}{\bar{r}}.$$

Na koniec, podstawiając wcześniej wyznaczone zmienne w stanie stacjonarnym do wzoru (1.2.24), otrzymujemy:

²⁸ Równanie LM (*Liquidity-Money*) opisuje równowagę na rynku pieniężnym, czyli warunek, w którym podaż pieniądza jest równa popytowi na pieniądz. Postać intensywną równania równowagi na rynku pieniężnym $m = h \frac{y^e}{r}$ w omawianym w tym rozdziale modelu KMG otrzymuje się poprzez podzielenie równania równowagi $M = h \frac{PY^e}{r}$ (zob. wzory (1.1.15)–(1.1.16)) przez wyrażenie pK .

$$0 = g + \bar{r} b - \tau_c (\bar{p} + \bar{r} b) - \tau_w \bar{U} \bar{y} - \mu \bar{m} - b(n + \bar{\pi}),$$

gdzie symbole z kreską oznaczają wcześniej ustalone wartości zmiennych w stanie stacjonarnym.

Rozwiązanie tego równania dla b prowadzi do zależności:

$$b = \frac{g - \tau_c \bar{p} - \tau_w \bar{U} \bar{y} - \mu \bar{m}}{\tau_c \bar{r} - \bar{r} + \mu}.$$

1.2.3. Równania opisujące wartości zmiennych modelu intensywnego w stanie stacjonarnym

Podsumujmy dotychczasowe rozważania. Na podstawie analizy z poprzedniego punktu otrzymujemy następujące zestawienie wzorów opisujących wartości zmiennych w stanie stacjonarnym:

- udział wynagrodzeń przed opodatkowaniem (kosztów pracy) w PKB:

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1 - \tau_w) \bar{y}},$$

- pracochłonność pełnego zatrudnienia (stosunek efektywnej pracy do kapitału rzeczowego):

$$\bar{l} = \frac{\bar{y}}{\bar{V}},$$

- oczekiwany popyt na jednostkę kapitału rzeczowego:

$$\bar{y}^e = \bar{y}^d = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_n n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} \cdot \bar{y},$$

- konsumpcja na jednostkę kapitału rzeczowego:

$$\bar{c} = \bar{y}^d - (n + \delta + g),$$

- realna podaż pieniądza na jednostkę kapitału rzeczowego:

$$\bar{m} = h \frac{\bar{y}^d}{\bar{r}},$$

- wskaźnik inflacji cen:

$$\bar{\pi} = \mu - n,$$

- wielkość zapasów na jednostkę kapitału rzeczowego:

$$\bar{v} = \frac{\bar{y} - \bar{y}^d}{n},$$

- stosunek podaży obligacji do nominalnej wartości kapitału rzeczowego:

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{y} - \mu \bar{m}}{\tau_c \bar{r} - \bar{r} + \mu},$$

- stopa zysku z kapitału rzeczowego:

$$\bar{\rho} = \bar{y}^d - \bar{U} \bar{y} - \delta,$$

- nominalna stopa procentowa:

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \mu - n - \xi,$$

- stosunek produkcji do kapitału rzeczowego:

$$\bar{y} = u^o p^p.$$

Żeby pokazać, że proporcje opisane powyższymi wzorami rzeczywiście pozwalają na równomierny wzrost gospodarki ze stopą wzrostu n równą stopie wzrostu wydajności pracy, skupmy się najpierw na efektywnej podaży pracy na jednostkę kapitału $l = xL/K$. W stanie stacjonarnym stopa wzrostu l wynosi zero, więc $l = \hat{x} + \hat{L} - \hat{K} = 0$. Z założenia podaż pracy L jest stała, a wydajność pracy x rośnie ze stopą n . Wynika stąd, że w stanie stacjonarnym stopa wzrostu kapitału rzeczowego jest równa stopie wzrostu wydajności pracy, czyli $\hat{K} = n$. Z równań $Y^p = y^p K$ i $u = Y/Y^p$ wynika, że $\bar{u}y^p = Y/K$. Ponieważ iloczyn $\bar{u}y^p$ jest stały w czasie, produkcja Y w stanie stacjonarnym również musi rosnać z tą samą stopą wzrostu co kapitał, równą n . Przyglądając się innym formułom, łatwo zauważyć, że w stanie stacjonarnym również inne zmienne ilościowe, jak inwestycje, konsumpcja prywatna i publiczna, rosną ze stopą n . Dodatkowo, biorąc pod uwagę, że w stanie stacjonarnym oczekiwana inflacja jest równa rzeczywistej inflacji, łatwo zauważyć, że w stanie stacjonarnym również tempo wzrostu płacy realnej $\hat{w} = \hat{w} - \hat{p}$ jest równe n .

Analizując stan stacjonarny, warto też odnotować ciekawy wniosek, że zgodnie z równaniem $\bar{c} = \gamma \bar{u}y^p - (n + \delta + g)$, im wyższa jest stopa równomiernego wzrostu n (równa stopie wzrostu wydajności pracy), tym niższa jest konsumpcja prywatna na jednostkę kapitału rzeczowego (a więc także udział konsumpcji w wartości produkcji, czyli w PKB). Ponadto wzrost n obniża udział wynagrodzeń przed opodatkowaniem (kosztów pracy) w PKB opisany równaniem (1.2.34).

Na koniec warto podkreślić, że jedynymi zmiennymi, które w stanie stacjonarnym zależą od wzrostu podaży pieniądza μ , są poziom inflacji $\bar{\pi} = \mu - n$ oraz stosunek

realnej podaży obligacji B/p do wielkości kapitału trwałego K , równy $\bar{b}$. Świadczy to o neutralności pieniądza w stanie stacjonarnym, rozumianej jako brak wpływu stopy wzrostu podaży pieniądza nie tylko na stopę równomiernego wzrostu, ale także na proporcje między zmiennymi ilościowymi w stanie stacjonarnym

1.2.4. Analiza wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany parametrów modelu

Wzory zaprezentowane w poprzednim punkcie umożliwiają analizę wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany wartości parametrów modelu. Przed przystąpieniem do takiej analizy dokonamy jednak przekształceń tych wzorów tak, aby uzyskać wartości zmiennych na jednostkę produkcji (PKB), a nie na jednostkę kapitału rzeczowego, co uczyni analizę bardziej standardową. Przekształcenie powyższe łatwo uzyskujemy, korzystając z tego, że w stanie stacjonarnym stosunek produkcji do kapitału rzeczowego jest określony wzorem:

$$\frac{Y}{K} = \bar{y} = \bar{u}y^p.$$

W celu zaprezentowania zmiennych na jednostkę PKB wystarczy więc podzielić zmienne na jednostkę kapitału rzeczowego przez stosunek produkcji do kapitału rzeczowego $\bar{y}$. Dodatkowo, aby ułatwić analizę wrażliwości, badane wzory zmiennych w stanie stacjonarnym doprowadzamy do ostatecznych postaci, tzn. do postaci, w których występują jedynie parametry modelu. W rezultacie wartości zmiennych w stanie stacjonarnym pokazujące wartości zmiennych modelu wyjściowego na jednostkę produkcji (PKB) spełniają następujące równania:

- stosunek całkowitego popytu finalnego do PKB:

$$\frac{Y^d}{Y} = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n},$$

- stosunek konsumpcji do PKB:

$$\frac{C}{Y} = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} - \frac{n + \delta + g}{\bar{u}y^p},$$

- stosunek inwestycji do PKB:

$$\frac{I}{Y} = \frac{n + \delta}{\bar{u}y^p},$$

- stosunek konsumpcji publicznej do PKB:

$$\frac{G}{Y} = \frac{g}{\bar{u}y^p},$$

- stosunek długu publicznego (obligacji) do PKB:

$$\frac{B}{pY} = \frac{g - \tau_c(-\tau_w \bar{y}^e + n + g + \tau_w \delta) - \tau_w(\bar{y}^e - n - \delta) - \mu \bar{m}}{\left(n(1 - \tau_w) + (-\tau_w \bar{y}^e + n + g + \tau_w \delta)(1 + \tau_c) + \tau_c(\mu - n)(1 - \tau_w)\right) \bar{u}y^p + \xi},$$

- stosunek wynagrodzeń przed opodatkowaniem (kosztów pracy) do PKB:

$$\frac{\omega L}{Y} = \frac{1}{(1 - \tau_w)} \left(\frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} - \frac{n + \delta + g}{\bar{u}y^p} \right),$$

- stosunek podaży pracy do popytu na pracę:

$$\frac{L}{L^d} = \frac{1}{\bar{V}}.$$

W przeprowadzonej analizie wrażliwości badamy wpływ na stan stacjonarny zmian w wartościach następujących parametrów: β_n – parametru reakcji produkcji na odchylenie rzeczywistego poziomu zapasów od pożądanego, β_z – parametru reakcji produkcji na przyrost oczekiwanego popytu, β_{N^d} – pożądanego stosunku zapasów do oczekiwanego popytu, $\bar{u}$ – naturalnego poziomu wykorzystania mocy produkcyjnych, y^p – potencjalnej efektywności kapitału rzeczowego (stosunek maksymalnej produkcji Y^p do kapitału rzeczowego), n – stopy wzrostu wydajności pracy, δ – współczynnika deprecjacji kapitału, g – stosunku popytu sektora rządowego do kapitału rzeczowego, τ_w, τ_c – stawek podatkowych, $\bar{V}$ – stopy zatrudnienia, μ – stopy wzrostu podaży pieniądza.

Żeby określić wpływ danego parametru, należy obliczyć wartości pochodnych analizowanych zmiennych.

- Pochodne cząstkowe stosunku wynagrodzeń przed opodatkowaniem (kosztów pracy) do PKB:

$$\frac{\omega L}{Y} = \frac{1}{(1 - \tau_w)} \left(\frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} - \frac{n + \delta + g}{\bar{u}y^p} \right)$$

są równe:

$$\frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1 - \tau_w)} \cdot \frac{(\beta_z - \beta_{N^d})n^2}{(n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2}; \text{ jeżeli } \beta_z > \beta_{N^d} \text{ to } \frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) > 0,$$

w przeciwnym razie $\frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) < 0$,

$$\frac{d}{d\beta_z} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1-\tau_w)} \cdot \frac{-(n+\beta_n)n^2}{(n+\beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} < 0,$$

$$\frac{d}{d\beta_{N^d}} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1-\tau_w)} \cdot \frac{-(n+\beta_n)\beta_n n}{(n+\beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} < 0,$$

$$\frac{d}{d\bar{u}} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1-\tau_w)} \cdot \frac{n+\delta+g}{\bar{u}^2 y^p} > 0,$$

$$\frac{d}{dy^p} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1-\tau_w)} \cdot \frac{n+\delta+g}{\bar{u}(y^p)^2} > 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) &= \\ &= \frac{1}{(1-\tau_w)} \left(\frac{(1+\beta_n \beta_{N^d} - \beta_z)n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_z - \beta_n \beta_{N^d} - 1)n - \beta_n^2 \beta_{N^d} - \beta_n}{(n+\beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} - \frac{1}{\bar{u} y^p} \right) (?), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\delta} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = -\frac{1}{(1-\tau_w)} \cdot \frac{1}{\bar{u} y^p} < 0,$$

$$\frac{d}{dg} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = -\frac{1}{(1-\tau_w)} \cdot \frac{1}{\bar{u} y^p} < 0,$$

$$\frac{d}{d\tau_w} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1-\tau_w)^2} \left(\frac{n+\beta_n}{n+\beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} - \frac{n+\delta+g}{\bar{u} y^p} \right) > 0; \text{ ponieważ } \frac{\omega L}{Y} > 0,$$

wyrażenie w nawiasie musi być dodatnie.

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

- Pochodne cząstkowe stosunku podaży pracy do popytu na pracę:

$$\frac{L}{L^d} = \frac{1}{\bar{V}}$$

są równe:

$$\frac{d}{d\bar{V}} \left(\frac{L}{L^d} \right) = -\frac{1}{\bar{V}^2} < 0.$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

- Pochodne cząstkowe stosunku całkowitego popytu finalnego do PKB:

$$\frac{Y^d}{Y} = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n}$$

są równe:

$$\frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) = \frac{(\beta_Z - \beta_{N^d}) n^2}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2}; \text{ jeżeli } \beta_Z > \beta_{N^d}, \text{ to } \frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) > 0,$$

$$\text{w przeciwnym razie } \frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) < 0,$$

$$\frac{d}{d\beta_Z} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) = \frac{-(n + \beta_n) n^2}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} < 0,$$

$$\frac{d}{d\beta_{N^d}} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) = \frac{-(n + \beta_n) \beta_n n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} < 0,$$

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) = \frac{(1 + \beta_n \beta_{N^d} - \beta_Z) n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{N^d} - 1) n - \beta_n^2 \beta_{N^d} - \beta_n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} (?).$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

- Pochodne cząstkowe stosunku konsumpcji do PKB:

$$\frac{C}{Y} = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} - \frac{n + \delta + g}{\bar{u} y^p}$$

są równe:

$$\frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{C}{Y} \right) = \frac{(\beta_Z - \beta_{N^d}) n^2}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2}; \text{ jeżeli } \beta_Z > \beta_{N^d}, \text{ to } \frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{C}{Y} \right) > 0,$$

$$\text{w przeciwnym razie } \frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{C}{Y} \right) < 0,$$

$$\frac{d}{d\beta_Z} \left(\frac{C}{Y} \right) = \frac{-(n + \beta_n) n^2}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} < 0,$$

$$\frac{d}{d\beta_{N^d}} \left(\frac{C}{Y} \right) = \frac{-(n + \beta_n) \beta_n n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} < 0,$$

$$\frac{d}{d\bar{u}}\left(\frac{C}{Y}\right) = \frac{n+\delta+g}{\bar{u}^2 y^p} > 0,$$

$$\frac{d}{dy^p}\left(\frac{C}{Y}\right) = \frac{n+\delta+g}{\bar{u}(y^p)^2} > 0,$$

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{C}{Y}\right) = \frac{(1+\beta_n\beta_{N^d}-\beta_z)n^2 + (\beta_n-2\beta_n\beta_z-\beta_n\beta_{N^d}-1)n - \beta_n^2\beta_{N^d}-\beta_n}{(n+\beta_z n^2 + \beta_n\beta_{N^d}n + \beta_n)^2} - \frac{1}{\bar{u}y^p} (?),$$

$$\frac{d}{d\delta}\left(\frac{C}{Y}\right) = -\frac{1}{\bar{u}y^p} < 0,$$

$$\frac{d}{dg}\left(\frac{C}{Y}\right) = -\frac{1}{\bar{u}y^p} < 0.$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

- Pochodne cząstkowe stosunku inwestycji do PKB:

$$\frac{I}{Y} = \frac{n+\delta}{\bar{u}y^p}$$

są równe:

$$\frac{d}{d\bar{u}}\left(\frac{I}{Y}\right) = -\frac{n+\delta}{\bar{u}^2 y^p} < 0,$$

$$\frac{d}{dy^p}\left(\frac{I}{Y}\right) = -\frac{n+\delta}{\bar{u}(y^p)^2} < 0,$$

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{I}{Y}\right) = \frac{d}{d\delta}\left(\frac{I}{Y}\right) = \frac{1}{\bar{u}y^p} > 0.$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

- Pochodne cząstkowe stosunku konsumpcji publicznej do PKB:

$$\frac{G}{Y} = \frac{g}{\bar{u}y^p}$$

są równe:

$$\frac{d}{d\bar{u}}\left(\frac{G}{Y}\right) = -\frac{g}{\bar{u}^2 y^p} < 0,$$

$$\frac{d}{dy^p} \left(\frac{G}{Y} \right) = -\frac{g}{\bar{u}(y^p)^2} < 0,$$

$$\frac{d}{dg} \left(\frac{G}{Y} \right) = \frac{1}{\bar{u}y^p} > 0.$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

- Pochodne cząstkowe stosunku długu publicznego (obligacji) do nominalnego PKB:

$$\frac{B}{pY} = \frac{g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m}}{n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})}$$

są równe:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{B}{pY} \right) = & - \frac{\left(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{d\beta_n} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{d\beta_n} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\beta_n} \right) (n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2} + \\ & + \frac{(g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \frac{d\bar{\rho}}{d\beta_n}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta_z} \left(\frac{B}{pY} \right) = & - \frac{\left(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{d\beta_z} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{d\beta_z} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\beta_z} \right) (n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2} + \\ & + \frac{(g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \frac{d\bar{\rho}}{d\beta_z}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta_{N^d}} \left(\frac{B}{pY} \right) = & - \frac{\left(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{d\beta_{N^d}} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{d\beta_{N^d}} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\beta_{N^d}} \right) (n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2} + \\ & + \frac{(g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \frac{d\bar{\rho}}{d\beta_{N^d}}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\bar{u}}\left(\frac{B}{pY}\right) = \frac{-\left(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{u}} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{d\bar{u}} + y^p \bar{U} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\bar{u}}\right)(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi}))}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2} +$$

$$+ \frac{(g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{u}}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{dy^p}\left(\frac{B}{pY}\right) = \frac{-\left(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{d\beta_{N^d}} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{dy^p} + \bar{u} \bar{U} + \mu \frac{d\bar{m}}{dy^p}\right)(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi}))}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2} +$$

$$+ \frac{(g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \frac{d\bar{\rho}}{dy^p}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{B}{pY}\right) = \frac{-\left(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{dn} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{dn} + \mu \frac{d\bar{m}}{dn}\right)(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi}))}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2} +$$

$$+ \frac{(g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \left(1 - \frac{d\bar{\rho}}{dn}\right)}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{d\delta}\left(\frac{B}{pY}\right) = \frac{-\left(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{d\delta} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{d\delta} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\delta}\right)(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi}))}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2} +$$

$$+ \frac{(g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \frac{d\bar{\rho}}{d\delta}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{dg} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{- \left(1 + \tau_c \frac{d\bar{\rho}}{dg} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{dg} + \mu \frac{d\bar{m}}{dg} \right) (n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2} + \frac{(g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \frac{d\bar{\rho}}{dg}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{d\tau_w} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-U \bar{u} y^p}{n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})},$$

$$\frac{d}{d\tau_c} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-\bar{\rho} (n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})) - (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(\bar{\rho} + \bar{\pi})}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{d\bar{V}} \left(\frac{B}{pY} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{- \left(\bar{m} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\mu} \right) (n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})) - (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m}) \tau_c}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2}.$$

Oprócz pochodnej $\frac{d}{d\bar{V}} \left(\frac{B}{pY} \right) = 0$, ze względu na złożoność wzorów, nie da się jednoznacznie określić, czy pozostałe pochodne są dodatnie, ujemne, czy równe 0.

- Pochodne cząstkowe wskaźnika inflacji cen:

$$\bar{\pi} = \mu - n$$

są równe:

$$\frac{d}{d\mu} (\bar{\pi}) = 1, \quad \frac{d}{dn} (\bar{\pi}) = -1.$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

- Pochodne stopy zysku z kapitału rzeczowego:

$$\bar{\rho} = - \frac{\tau_w}{1 - \tau_w} \cdot \frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} \bar{u} y^p + \frac{n + \delta + g}{1 - \tau_w} - \delta$$

są równe:

$$\frac{d}{d\beta_n}(\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{1-\tau_w} \cdot \frac{(\beta_Z - \beta_{N^d})n^2}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} \bar{u} y^p; \text{ jeżeli } \beta_Z > \beta_{N^d}, \text{ to } \frac{d}{d\beta_n}(\bar{\rho}) > 0,$$

$$\text{w przeciwnym razie } \frac{d}{d\beta_n}(\bar{\rho}) < 0,$$

$$\frac{d}{d\beta_Z}(\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{1-\tau_w} \cdot \frac{-(n + \beta_n)n^2}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} \bar{u} y^p > 0,$$

$$\frac{d}{d\beta_{N^d}}(\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{1-\tau_w} \cdot \frac{-(n + \beta_n)\beta_n n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} \bar{u} y^p > 0,$$

$$\frac{d}{d\bar{u}}(\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{1-\tau_w} \cdot \frac{n + \beta_n}{n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} y^p < 0,$$

$$\frac{d}{dy^p}(\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{1-\tau_w} \cdot \frac{n + \beta_n}{n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} \bar{u} < 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn}(\bar{\rho}) &= -\frac{\tau_w}{1-\tau_w} \times \\ &\times \frac{(1 + \beta_n \beta_{N^d} - \beta_Z)n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{N^d} - 1)n - \beta_n^2 \beta_{N^d} - \beta_n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} \bar{u} y^p + \frac{1}{1-\tau_w} (?), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\delta}(\bar{\rho}) = \frac{\tau_w}{1-\tau_w} > 0,$$

$$\frac{d}{dg}(\bar{\rho}) = \frac{1}{1-\tau_w} > 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_w}(\bar{\rho}) &= -\frac{1}{(1-\tau_w)^2} \cdot \frac{n + \beta_n}{n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} \bar{u} y^p + \frac{n + \delta + g}{(1-\tau_w)^2} = \\ &= -\frac{1}{(1-\tau_w)^2} (y^d - (n + \delta + g)) = -\frac{1}{(1-\tau_w)^2} \bar{c} < 0. \end{aligned}$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

Wyniki analizy wrażliwości wartości powyższych zmiennych oraz wskaźnika inflacji $\bar{\pi} = \mu - n$, stopy zysku z kapitału rzeczowego $\bar{\rho} = \bar{y}^e - \bar{U} \bar{u} y^p - \delta$ i stosunku podaży pracy do popytu na pracę $L/L^d = 1/\bar{V}$ na zmiany wartości wybranych para-

metrów modelu przedstawiono w tabeli 1.2. Znak (+) w tabeli oznacza, że wartość danej zmiennej w stanie stacjonarnym rośnie wraz ze wzrostem wybranego parametru, znak (–), że maleje. Znak (?) oznacza, że ze względu na postać równania zależności nie można jednoznacznie określić.

Analiza przedstawiona w tabeli 1.2 w połączeniu ze wzorami zaprezentowanymi w punkcie 1.1.3 opisującymi stan stacjonarny prowadzi do kilku interesujących wniosków na temat zależności tych proporcji od parametrów modelu.

Tabela 1.2. Analiza wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany parametrów modelu

Zmienna	$\beta_n \uparrow$	$\beta_z \uparrow$	$\beta_{Nd} \uparrow$	$\bar{u} \uparrow$	$y_p \uparrow$	$n \uparrow$	$\delta \uparrow$	$g \uparrow$	$\tau_w \uparrow$	$\tau_c \uparrow$	$\bar{V} \uparrow$	$\mu \uparrow$
$\omega L/Y$	?	–	–	+	+	?	–	–	+	0	0	0
L/L^d	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–	0
Y^d/Y	?	–	–	0	0	?	0	0	0	0	0	0
C/Y	?	–	–	+	+	?	–	–	0	0	0	0
I/Y	0	0	0	–	–	+	+	0	0	0	0	0
G/Y	0	0	0	–	–	0	0	+	0	0	0	0
B/pY	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0	?
$\bar{\pi}$	0	0	0	0	0	–	0	0	0	0	0	+
$\bar{\rho}$	?	+	+	–	–	?	+	+	–	0	0	0

Źródło: obliczenia własne.

Wniosek 1. Proporcje między zmiennymi ilościowymi modelu nie zależą od stopy wzrostu nominalnej podaży pieniądza μ , co jest potwierdzeniem neutralności pieniądza. Co ciekawe, stopa ta ma jednak wpływ na stosunek długu publicznego do wielkości produkcji w stanie stacjonarnym:

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{- \left(\bar{m} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\mu} \right) \left(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \mu - n) \right) - (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w U \bar{u} y^p - \mu \bar{m}) \tau_c}{\left(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \mu - n) \right)^2},$$

gdzie $\frac{d\bar{m}}{d\mu} = -1$.

Wniosek 2. Na podstawie postaci pochodnych określających wpływ stopy równomiernego wzrostu n (równej stopie wzrostu wydajności pracy) możemy stwierdzić, że wzrost tej stopy jest wynagradzany wzrostem udziału inwestycji w PKB w stanie stacjonarnym:

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{I}{Y} \right) = \frac{1}{\bar{u} y^p}.$$

Wzrost n nie wpływa natomiast na stosunek podaży pracy do popytu na pracę ani na konsumpcję sektora publicznego w stosunku do PKB w stanie stacjonarnym:

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{L}{L^d} \right) = \frac{d}{dn} \left(\frac{G}{Y} \right) = 0.$$

Warto też odnotować, że wzrost n zmniejsza wartość wskaźnika inflacji w stanie stacjonarnym:

$$\frac{d}{dn}(\bar{\pi}) = -1.$$

Ze względu na dość skomplikowane wzory określające wartości pochodnych innych zmiennych, tj. udziału wynagrodzeń w PKB, udziału konsumpcji prywatnej w PKB, udziału popytu w PKB i stopy zysku z kapitału rzeczowego, nie można jednoznacznie określić wpływu wzrostu wydajności pracy na wartości tych zmiennych w stanie stacjonarnym. Niemniej jednak poniżej spróbujemy analitycznie określić ich znak.

Spójrzmy na pochodną udziału wynagrodzeń w PKB względem wydajności pracy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) &= \frac{1}{1 - \tau_w} \times \\ &\times \left(\frac{(1 + \beta_n \beta_{N^d} - \beta_z) n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_z - \beta_n \beta_{N^d} - 1) n - \beta_n^2 \beta_{N^d} - \beta_n}{(n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} - \frac{1}{\bar{u} y^p} \right). \end{aligned} \quad (1.2.35)$$

Żeby określić znak tej pochodnej, w pierwszej kolejności sprawdzimy, kiedy jest równa zero. Badamy równanie:

$$\begin{aligned} (1 + \beta_n \beta_{N^d} - \beta_z) n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_z - \beta_n \beta_{N^d} - 1) n - \beta_n^2 \beta_{N^d} - \beta_n + \\ - \frac{(n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2}{\bar{u} y^p} = 0. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe ze względu na zmienną n , które wygodniej jest zapisać w postaci:

$$an^2 + bn + c = 0, \quad (1.2.36)$$

gdzie:

$$a = 1 + \beta_n \beta_{N^d} - \beta_z,$$

$$b = \beta_n - 2\beta_n\beta_Z - \beta_n\beta_{N^d} - 1,$$

$$c = -\beta_n^2\beta_{N^d} - \beta_n - \frac{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n\beta_{N^d}n + \beta_n)^2}{\bar{u}y^p} < 0.$$

Jeśli założymy, że:

$$a = 1 + \beta_n\beta_{N^d} - \beta_Z > 0,$$

to wyróżnik trójmianu kwadratowego równania (1.2.36) jest dodatni:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

a iloczyn pierwiastków tego równania jest ujemny:

$$n_1 n_2 = \frac{c}{a} < 0.$$

Oznacza to, że równanie (1.2.36) ma dwa rozwiązania rzeczywiste, z czego jedno jest dodatnie, a drugie ujemne.

Rozwiązania równania $an^2 + bn + c = 0$ mają postać:

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Założmy, że $n_1 < 0$, musi więc zachodzić warunek $n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} < 0$, a zatem $-b < \sqrt{\Delta}$. Oznacza to, że

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} > \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} = \frac{-\beta_n + 2\beta_n\beta_Z + \beta_n\beta_{N^d} + 1}{1 + \beta_n\beta_{N^d} - \beta_Z} = \frac{\beta_n(2\beta_Z + \beta_{N^d} - 1) + 1}{1 + \beta_n\beta_{N^d} - \beta_Z},$$

z czego dalej wynika, że jeżeli $2\beta_Z\beta_n > \beta_n - \beta_Z$, to $n_2 > 1$.

Przy założeniu, że $0 < n < 1$, z powyższej analizy wynika, że przy warunkach:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \beta_n\beta_{N^d} - \beta_Z &> 0, \\ \beta_n - 2\beta_n\beta_Z - \beta_n\beta_{N^d} - 1 &< 0, \\ 2\beta_Z\beta_n &> \beta_n - \beta_Z, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.37)$$

pochodna (1.2.35) jest ujemna, a w konsekwencji oznacza to, że wzrost n wpływa negatywnie na udział wynagrodzeń w PKB w stanie stacjonarnym. Podobne wnioski, przy powyższych założeniach, płyną z analizy pochodnych:

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{C}{Y} \right) = \frac{(1 + \beta_n \beta_{N^d} - \beta_Z) n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{N^d} - 1) n - \beta_n^2 \beta_{N^d} - \beta_n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} - \frac{1}{\bar{u} y^p},$$

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) = \frac{(1 + \beta_n \beta_{N^d} - \beta_Z) n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{N^d} - 1) n - \beta_n^2 \beta_{N^d} - \beta_n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2}.$$

Oznacza to, że zwiększenie stopy równomiernego wzrostu (stopy wzrostu wydajności pracy) n wpływa negatywnie także na wartość stosunku Y^d/Y popytu do PKB oraz stosunku C/Y konsumpcji prywatnej do PKB w stanie stacjonarnym.

Wzrost stopy równomiernego wzrostu n (wydajności pracy) prowadzi do wzrostu stopy zysku z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym. Przedstawia to poniższa analiza pochodnej:

$$\frac{d}{dn}(\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{1 - \tau_w} \times$$

$$\times \left(\frac{(1 + \beta_n \beta_{N^d} - \beta_Z) n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{N^d} - 1) n - \beta_n^2 \beta_{N^d} - \beta_n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n)^2} \right) \bar{u} y^p + \frac{1}{1 - \tau_w}.$$

Powyższą pochodną możemy zapisać, wykorzystując pochodną $\frac{d}{dn} \left(\frac{Y^d}{Y} \right)$:

$$\frac{d}{dn}(\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{1 - \tau_w} \cdot \frac{d}{dn} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) \bar{u} y^p + \frac{1}{1 - \tau_w}.$$

Przy założeniach (1.2.97) mamy $\frac{d}{dn} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) < 0$, zatem $\frac{d}{dn}(\bar{\rho}) < 0$.

Określenie wpływu n na stosunek długu publicznego do PKB, podobnie jak w przypadku powyższych zmiennych, wymaga przyjęcia kilku założeń. Wynika to z postaci pochodnej:

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{- \left(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{dn} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{dn} + \mu \frac{d\bar{m}}{dn} \right) (n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2} +$$

$$+ \frac{(g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \left(1 - \frac{d\bar{\rho}}{dn} \right)}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2}.$$

Na przykład, jeżeli τ_c oraz τ_w są odpowiednio małe, to:

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{B}{pY} \right) > 0.$$

To oznacza, że w sytuacji zwiększenia n i przy niskich podatkach τ_c oraz τ_w rośnie dług publiczny w stosunku do PKB.

Wniosek 3. Zgodnie z równaniem $C = (1 - \tau_w) \omega L^d$ konsumpcja sektora prywatnego jest równa wynagrodzeniom pracowników najemnych opodatkowanym stawką τ_w . Pomimo to udział tej konsumpcji w PKB (C/Y) nie zależy od stawki τ_w (por. punkt 1.2.4). Z kolei stawka podatkowa τ_w wpływa na udział wynagrodzeń przed opodatkowaniem w PKB ($\omega L/Y$), chociaż same koszty pracy ωL^d bezpośrednio od τ_w nie zależą (por. punkt 1.2.4).

Wniosek 4. Stopa zysku z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym również zależy od stawki podatku od wynagrodzeń τ_w (punkt 1.2.3), chociaż stawka ta nie ma bezpośredniego wpływu na wielkość zysku będącą różnicą między wielkością produkcji a kosztami pracy i deprecjacją kapitału rzeczowego. Warto odnotowania jest również to, że na stopę zysku z kapitału rzeczowego mają wpływ parametry reakcji β_n , β_Z i β_{N^d} , od których zależy nadwyżka produkcji ponad oczekiwany popyt.

Wniosek 5. Jedyną zmienną zależną od dwóch stawek podatkowych jest stosunek długu publicznego do PKB:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_w} \left(\frac{B}{pY} \right) &= - \frac{\bar{U} \bar{u} y^p}{n + \xi - (1 - \tau_c) \bar{\rho} + \bar{\pi} \tau_c}, \\ \frac{d}{d\tau_c} \left(\frac{B}{pY} \right) &= \frac{-\bar{\rho} (n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})) - (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w U \bar{u} y^p - \mu \bar{m}) (\bar{\rho} + \bar{\pi})}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2}. \end{aligned}$$

Jeżeli $n + \xi + \bar{\pi} \tau_c < (1 - \tau_c) \bar{\rho}$, to wzrost stawki podatkowej τ_w zwiększy wartość stosunku długu publicznego do PKB w stanie stacjonarnym.

Jeżeli oprócz tego założymy, że $g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w U \bar{u} y^p - \mu \bar{m} < 0$, to wzrost stawki τ_c zwiększa wartość stosunku długu publicznego do PKB w stanie stacjonarnym.

Wniosek 6. Z analizy przedstawionej w tabeli 1.2 oraz z pochodnych analizowanych zmiennych w stanie stacjonarnym wynika, że wzrost wartości parametru reakcji β_n (reakcja produkcji na odchylenie popytu od podaży zapasów) nie zmienia wartości zmiennych: L/L^d , I/Y , G/Y oraz $\bar{\pi}$. Natomiast wpływ zmiany wartości parametru reakcji β_n na pozostałe badane zmienne (z wyjątkiem zmiennej B/pY) zależy od różnicy wartości parametrów reakcji ($\beta_Z - \beta_{N^d}$) (β_Z – reakcja produkcji na zmianę oczekiwanego popytu, β_{N^d} – pożądany stosunek zapasów do oczekiwanego popytu).

Jeśli różnica ta jest dodatnia (ujemna), to wzrost wartości parametru β_n zwiększa (zmniejsza) wartości zmiennych: $\omega L^d/Y$, $Y^{d/Y}$, C/Y oraz $\bar{p}$ w stanie stacjonarnym. Ze wzoru na pochodną zmiennej B/pY względem parametru β_n trudno ustalić wpływ zmiany wartości tego parametru na wartość tej zmiennej w stanie stacjonarnym.

Wniosek 7. Wzrost wartości parametru reakcji β_z wpływa negatywnie na wartość udziału płac w PKB w stanie stacjonarnym oraz na stosunek popytu do PKB w stanie stacjonarnym. Pozytywnie wpływa jedynie na zysk z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym (tabela 1.2). Z powodu dość skomplikowanego wzoru na pochodną zmiennej B/pY względem parametru β_z trudno jednoznacznie ocenić wpływ wartości tego parametru reakcji na wartość zmiennej B/pY w stanie stacjonarnym. Taką samą reakcję badanych zmiennych w stanie stacjonarnym powoduje zmiana wartości parametru reakcji β_{N^d} .

W rozdziale czwartym na podstawie danych o polskiej gospodarce empirycznie sprawdzimy wpływ wartości niektórych parametrów reakcji na zmienną B/pY w stanie stacjonarnym, czego nie mogliśmy zrobić analitycznie ze względu na dość skomplikowane wzory na pochodne tej zmiennej w stanie stacjonarnym.

Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono ulepszoną wersję modelu KMG. Zastosowane modyfikacje równań modelu KMG poprawiły ich interpretację ekonomiczną, co sprawiło, że nowy model w porównaniu z jego starszymi wersjami lepiej opisuje funkcjonowanie gospodarki. Ważnym wynikiem rozważań przeprowadzonych w tym rozdziale jest to, że modyfikacje pozwoliły zachować możliwość przekształcenia modelu do postaci intensywnej oraz jednoznaczne wyznaczenie jego stanu stacjonarnego, co jest niezbędne do wykazania stabilności modelu przedstawionej w trzecim rozdziale monografii. W wyniku wprowadzonych modyfikacji pojawiły się nowe sprzężenia zwrotne, co zwiększyło złożoność modelu. Miało to pozytywne oraz negatywne konsekwencje na kolejnych etapach badania modelu. Pozytywną konsekwencją jest to, że zwiększona liczba interakcji między zmiennymi lepiej odzwierciedla rzeczywistą gospodarkę. Dzięki temu na podstawie modelu można dokładniej badać jej zachowania. Natomiast negatywną konsekwencją, która ujawnia się podczas analizy modelu w postaci intensywnej, są skomplikowane wzory, których analiza matematyczna jest bardzo trudna lub niemożliwa. Dopiero analiza empiryczna pozwala ocenić niektóre własności modelu. Analiza empiryczna została przedstawiona w rozdziale czwartym monografii. Modyfikacje wpłynęły także na wartości zmiennych w stanie stacjonarnym modelu w postaci intensywnej. W porównaniu z poprzednimi wersjami modelu KMG, we wzorach opisujących stan stacjonarny pojawia się równanie określające nominalną stopę procentową w stanie

stacjonarnym zależną od parametrów modelu. W starszych modelach KMG stopa ta w stanie stacjonarnym jest zmienną egzogeniczną. Jak zobaczymy w rozdziale trzecim, modyfikacja modelu polegająca na wprowadzeniu stawek podatkowych (których w ogóle nie było we wcześniejszych wersjach modelu KMG) otwiera możliwości badania nie tylko zależności stanu stacjonarnego modelu od wysokości stawek podatkowych, ale wpływu tych stawek na stabilność modelowanej gospodarki.

ROZDZIAŁ 2

Model typu Keynesa-Metzlera-Goodwina
z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym

W tym rozdziale przedstawiono drugą wersję modelu KMG. Większość równań tej wersji modelu jest identyczna z równaniami modelu z rozdziału pierwszego. W szczególności zachowujemy niemal wszystkie modyfikacje oryginalnych równań modelu KMG opisane w poprzednim rozdziale. Niemniej model prezentowany poniżej różni się istotnie od modelu z rozdziału pierwszego. Zasadnicza różnica dotyczy opisu funkcjonowania rynku pieniężnego, a w szczególności założeń o czynnikach wpływających na kształtowanie się stopy procentowej. W modelu prezentowanym w tym rozdziale stopa procentowa kształtuje się zgodnie z tzw. regułą Taylora. Z tego względu analizowany model będziemy nazywać modelem KMG^T.

Druga istotna różnica polega na wprowadzeniu do modelu KMG kredytu inwestycyjnego, co umożliwi pokazanie, w jakim zakresie inwestycje sektora prywatnego są finansowane z jego zysków po opodatkowaniu, a w jakim z kredytu (w modelu z rozdziału pierwszego wyprowadzona była jedynie równość inwestycji i oszczędności krajowych, która ma charakter tożsamości zachodzącej *ex post*).

Wprowadzenie do modelu KMG zarówno reguły Taylora, jak i kredytu inwestycyjnego nie jest oryginalnym pomysłem autora²⁴. Nowością jest natomiast to, że obecnie reguła Taylora oraz kredyt inwestycyjny zostały wkomponowane w nowy, zmodyfikowany model KMG zaprezentowany w rozdziale pierwszym, co ma poważne konsekwencje.

W monografii w odniesieniu do modelu KMG^T podejmowane będą te same zagadnienia badawcze co w przypadku modelu KMG z rozdziału pierwszego. Zbadamy, czy model KMG^T można sprowadzić do postaci intensywnej, czy istnieje jego stan stacjonarny i czy można udowodnić jego lokalną, asymptotyczną stabilność. Na koniec oba modele zostaną przetestowane empirycznie z wykorzystaniem danych o polskiej gospodarce.

2.1. Reguła Taylora, kredyt inwestycyjny i emisja obligacji

W modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza przedstawionym w rozdziale pierwszym podaż pieniądza (ilość pieniądza w obiegu) rośnie wykładniczo ze stopą μ . Żeby było to możliwe, identycznie musi rosnąć popyt na pieniądź zależny od wielkości oczekiwanego popytu i stopy procentowej (zob. rozdz. 1, pkt 1.1.4). To z kolei wymaga odpowiedniego kształtowania stopy procentowej bądź to w wyniku bezpośrednich zmian stopy procentowej banku centralnego, bądź też poprzez

²⁴ Model KMG z regułą Taylora jest prezentowany w pracach Asady i in. (2003, rozdział 6) oraz Chiarelli i in. (2005, rozdział 9). Model KMG z kredytem inwestycyjnym znaleźć można m.in. w pracy Charpe'a i in. (2011, rozdział 4).

odpowiednie operacje otwartego rynku. W każdym z tych przypadków wysokość stopy procentowej jest podporządkowana celowi, którym jest kontrola ilości pieniądza w obiegu. Kierunek przyczynowo-skutkowy tej sytuacji możemy zapisać jako:

$$M \rightarrow r.$$

Takie postrzeganie funkcjonowania rynku pieniężnego, choć ciągle obecne w podręcznikach makroekonomii, staje się coraz bardziej odległe od rzeczywistości. Obecnie większość banków centralnych nie zwraca już wielkiej uwagi na agregaty monetarne typu M1 czy M2 i w swojej polityce pieniężnej skupia się bezpośrednio na stopie procentowej, przyjmując różne reguły jej kształtowania (Chiarella i in., 2005, rozdział 8; Taylor, 2015). W rezultacie zależność przyczynowo-skutkowa w polityce pieniężnej ulega odwróceniu – celem staje się stopa procentowa, a skutkiem podaż pieniądza (ilość pieniądza w obiegu):

$$r \rightarrow M.$$

Najczęściej omawianą w literaturze regułą kształtowania stopy procentowej jest reguła Taylora, której autorem jest profesor Uniwersytetu Stanforda John B. Taylor²⁵. Jest ona jednym z narzędzi prowadzenia polityki pieniężnej wykorzystywanych przez współczesne banki centralne²⁶. Regule tej poświęcono punkt 2.1.1.

2.1.1. Reguła Taylora kształtowania stopy procentowej

W swojej regule Taylor uzależnił wysokość krótkookresowej, nominalnej stopy procentowej od odchylenia inflacji od docelowego poziomu inflacji (celu inflacyjnego banku centralnego) oraz od procentowego odchylenia PKB od jego poziomu potencjalnego (od tzw. luki produkcyjnej). Równanie opisujące tę zależność ma postać:

$$r = \bar{R} + \alpha_1(\hat{p}^{(4)} - \pi^o) + \hat{p}^{(4)} + \alpha_2\tilde{y}, \quad (2.1.1)$$

gdzie r to nominalna stopa procentowa banku centralnego (np. stopa referencyjna lub redyskontowa), $\bar{R}$ – długookresowa realna stopa procentowa, $\hat{p}^{(4)}$ – poziom inflacji w poprzednich czterech kwartałach mierzony deflatorem PKB²⁷, π^o – pożądany poziom wskaźnika inflacji (cel inflacyjny). Symbol $\tilde{y}$ oznacza lukę produkcyjną (nazywaną także luką popytową lub dochodową) opisaną równaniem:

²⁵ Po raz pierwszy reguła ta została przedstawiona w pracy Taylora (1993, s. 195–214).

²⁶ Inne sposoby określania wysokości nominalnej stopy procentowej oparte na regułach to m.in.: klasyczna reguła Friedmana dla bazy monetarnej, reguła oparta wyłącznie na stopie inflacji, reguła luki bezrobocia, reguła Calvy (Przybylska-Mazur, 2013).

²⁷ Deflator PKB to stosunek nominalnego PKB (w cenach bieżących) do realnego PKB (w cenach stałych, z pewnego roku bazowego). Wskaźnik inflacji liczony na podstawie deflatora to stopa wzrostu tego deflatora.

$$\tilde{y} = \frac{Y - Y^p}{Y} \cdot 100\%,$$

gdzie Y to rzeczywisty, aktualny poziom produkcji, a Y^p – poziom potencjalny. Symbole α_1, α_2 to dodatnie współczynniki reakcji stopy procentowej na wartości zmiennych $(\hat{p}^{(4)} - \pi^o)$ i $\tilde{y}$.

Z reguły Taylora (2.1.1) wynika zalecenie stosowania przez władze monetarne bardziej restrykcyjnej polityki pieniężnej, czyli podwyższanie stopy procentowej w sytuacji, gdy inflacja $\hat{p}^{(4)}$ przewyższa cel inflacyjny π^o . Jeśli inflacja $\hat{p}^{(4)}$ jest poniżej celu inflacyjnego, to wskazane jest obniżenie stopy procentowej, a więc rozluźnienie polityki pieniężnej. Równocześnie, gdy wzrost gospodarczy jest słaby lub gospodarka doświadcza recesji (ujemna wartość luki produkcyjnej $\tilde{y}$), bank centralny powinien obniżyć stopę procentową, aby stymulować wzrost gospodarczy. Gdy poziom produkcji jest wyższy od potencjalnego (dodatnia wartość luki produkcyjnej $\tilde{y}$) i mamy do czynienia z tak zwanym przegrzaniem koniunktury prowadzącym do wzrostu cen, bank centralny powinien podnosić stopę procentową, aby ograniczać popyt i tym samym inflację²⁸.

Stosując bezpośrednio regułę Taylora formie określonej równaniem (2.1.1), władze monetarne narażają gospodarkę na gwałtowne zmiany nominalnej stopy procentowej wywołane szokami gospodarczymi takimi jak nagły wzrost inflacji $\hat{p}$ lub załamanie produkcji wynikające z zależności (2.1.1). Duża, skokowa zmiana stopy procentowej mogłaby się okazać szkodliwa dla gospodarki.

Z tego względu lepsza wydaje się propozycja, aby zmiany stopy procentowej wynikające z określonej sytuacji gospodarczej były rozłożone w czasie i dzięki temu bardziej wygładzone. Taka właśnie zmodyfikowana reguła Taylora została zaproponowana przez Chiarellę i in. (2005, s. 378). Regułę tę opisuje równanie różniczkowe:

$$\dot{r} = -\beta_r (r - r^o) + \beta_p (\hat{p} - \pi^o) + \beta_u (u - u^o), \quad (2.1.2)$$

gdzie:

$r - r^o$ – odchylenie bieżącej nominalnej stopy procentowej r od jej pożądanej wysokości r^o ,

$\hat{p} - \pi^o$ – odchylenie wskaźnika bieżącej inflacji $\hat{p}$ (stopy wzrostu cen) od wskaźnika pożądanej inflacji π^o (celu inflacyjnego),

²⁸ Banki centralne przy stosowaniu reguły Taylora natrafiają na problemy, ponieważ nie znają dokładnej realnej stopy równowagi, a pomiary poziomów wzrostu gospodarczego i inflacji są obarczone błędami. Należy pamiętać, że modele ekonometryczne to tylko uproszczone opisy rzeczywistości. Dlatego też przyjmuje się, że reguła Taylora nie może być mechaniczną formą prowadzenia polityki pieniężnej, ale powinna być punktem odniesienia dla podejmowania decyzji przez banki centralne. W praktyce wiele banków centralnych stosuje regułę Taylora do ustalania poziomu stóp procentowych, lecz żaden nie przyjął jej oficjalnie jako narzędzia służącego do tego celu (Wojtyna, 2004, s. 255).

$u - u^o$ – odchylenie wskaźnika bieżącego wykorzystania zdolności produkcyjnych u od jego normalnego (pożądanego) poziomu u^o ,
 $\beta_r, \beta_p, \beta_u$ – dodatnie współczynniki pokazujące siłę wpływu odchylen $r - r^o$, $\hat{p} - \pi^o$, $u - u^o$ na zmianę stopy procentowej wyrażoną pochodną $\dot{r} = dr/dt$.

Warto podkreślić, że w sytuacji, gdy znany jest pożądaný poziom inflacji π^o , ustalenie pożądaney nominalnej stopy procentowej r^o jest równoznaczne z ustaleniem pożądaney realnej stopy procentowej R^o , gdyż $R^o = r^o - \pi^o$ ²⁹.

Z reguły Taylora postaci (2.1.2) wynikają w zasadzie te same wnioski dla polityki pieniężnej banku centralnego co z reguły (2.1.1). Po pierwsze bank centralny powinien dążyć do utrzymywania nominalnej stopy procentowej na poziomie zbliżonym do pożądaney nominalnej stopy procentowej r^o , co przy równoczesnym dążeniu do utrzymywania inflacji w otoczeniu celu inflacyjnego π^o oznacza dążenie do stabilizowania realnej stopy procentowej wokół ustalonej, realnej stopy procentowej $R^o = r^o - \pi^o$. Zgodnie ze wzorem (2.1.2) oznacza to tendencję do obniżania stopy procentowej, gdy $r > r^o$, i jej podwyższania, gdy $\hat{p} > \pi^o$. Dodatkowo celem banku centralnego powinna być troska o stabilizowanie cyklu koniunkturalnego, wyrażająca się tendencją do podwyższania stopy procentowej i ograniczania popytu w wypadku nadmiernego wykorzystania zdolności produkcyjnych ($u > u^o$) i obniżania stopy procentowej w przeciwnym razie.

Opisana powyżej reguła Taylora (2.1.2) kształtowania stopy procentowej w dalszej części tego rozdziału zostanie dodana do równań analizowanego nowego modelu KMG. Równocześnie wycofane zostaną przyjmowane w rozdziale pierwszym założenia o wykładniczym wzroście podaży pieniądza, nieliniowej funkcji popytu na pieniądz i stopie procentowej zapewniającej równowagę rynku pieniężnego (innymi słowy, przestają obowiązywać wszystkie równania z punktu 1.1.4).

2.1.2. Zadłużenie sektora prywatnego i publicznego

W modelu KMG prezentowanym w pierwszym rozdziale monografii podaż pieniądza M (czyli ilość pieniądza w obiegu) jest zmienną potrzebną jedynie do modelowania dynamiki stopy procentowej, która to stopa wpływa na decyzje inwestycyjne sektora prywatnego. Stopa wzrostu podaży pieniądza wpływa ponadto na oczekiwania inflacyjne, które z kolei oddziałują na rzeczywistą inflację. W modelu brakuje natomiast równań wiążących bezpośrednio zmienną M lub jej przyrosty z dochodami do dyspozycji sektora prywatnego i jego popytem na dobra

²⁹ Stopę procentową R^o można też określić mianem naturalnej stopy procentowej. Koncepcja takiej stopy pochodzi od Knuta Wicksella (1936), który za naturalną stopę procentową uznał realną stopę procentową, przy której inwestycje są równe oszczędnościom, a system znajduje się w równowadze rozumianej jako stabilność pieniądza (więcej na temat naturalnej stopy procentowej piszą Brzoza-Brzezina (2003) oraz Winek i Robak (2003)).

i usługi. Brak takich powiązań nie tylko jest typowy dla modelu KMG, ale jest cechą większości modeli makroekonomicznych. Trudności związane z bardziej ścisłym powiązaniem podaży pieniądza z dochodami do dyspozycji sektora prywatnego i jego popytem mają przyczyny zarówno w wymiarze koncepcyjnym, jak i empirycznym. Dlatego coraz częściej w monetarnych modelach makroekonomicznych znika kategoria podaży pieniądza, a pojawiają się kredyty udzielane gospodarstwom domowym lub przedsiębiorstwom, które łatwo powiązać z ich dochodami do dyspozycji³⁰. Oczywiście udzielone kredyty wpływają na ilość pieniądza w obiegu, ale niekoniecznie muszą być z nią utożsamiane. Warto też dodać, że rezygnacja z rozpatrywania podaży pieniądza jest też ściśle powiązana z rezygnacją z modelowania stopy procentowej jako zmiennej równoważącej rynek pieniądza i wprowadzaniem w to miejsce innych reguł kształtowania stopy procentowej takich jak reguła Taylora.

Wzorując się na modelu KMG przedstawionym przez Charpe'a i in. (2011, rozdział 4) w prezentowanym w tym rozdziale modelu KMGT wprowadzamy nową zmienną Λ oznaczającą zadłużenie sektora prywatnego w sektorze bankowym z tytułu zaciągniętych kredytów. Pochodną $\dot{\Lambda}$ interpretujemy jako zmianę zadłużenia równą saldu kredytów zaciągniętych i spłaconych przez ten sektor w danym okresie (momencie).

Inaczej niż w modelu KMG z rozdziału pierwszego, zakładamy, że obligacji rządowych nie kupuje sektor prywatny (niefinansowy), lecz banki, co oznacza, że banki, kupując obligacje, udzielają rządowi pożyczki na sfinansowanie deficytu budżetowego. Podobnie jak w rozdziale pierwszym, symbolem B oznaczamy dług publiczny (tym razem zadłużenie rządu w sektorze bankowym, a nie w sektorze prywatnym), a symbolem $\dot{B}$ pochodną przedstawiającą zmianę długu publicznego (równą różnicy między wartością nowych obligacji wyemitowanych przez rząd i kupionych przez banki a wartością starych obligacji wykupionych przez rząd).

Dla uproszczenia zakładamy jednakowe oprocentowanie obligacji i kredytów inwestycyjnych dla przedsiębiorstw równe stopie procentowej kształtowanej zgodnie z regułą Taylora (2.1.2). Odsetki płacone przez sektor prywatny i rządowy wynoszą zatem odpowiednio $r\Lambda$ i rB . Działalność sektora bankowego (finansowego) ilustruje rysunek 2.1.



Rysunek 2.1. Schemat udzielania kredytów w modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym

³⁰ Interesujący przykład modelu z kredytem konsumpcyjnym pracowników najemnych można znaleźć w pracy Chiarelli i in. (2014, rozdział 2).

Wielkość pożyczek zaciąganych przez państwo w wyniku sprzedaży obligacji jest równa wielkości deficytu budżetowego, czyli:

$$\dot{B} = pG + rB - pT,$$

gdzie B to dług publiczny (całkowita wartość obligacji rządowych o stałej cenie w posiadaniu sektora bankowego), $\dot{B}$ to zmiana długu publicznego, r – nominalna stopa procentowa, p – ceny, a T to podatki.

Przy założeniu, że całość zysków sektora prywatnego po opodatkowaniu jest przeznaczana na inwestycje, wielkość kredytu inwestycyjnego spełnia równanie

$$\dot{\Lambda} = p(I_n - (1 - \tau_c) \rho K), \quad (2.1.3)$$

gdzie I_n oznacza nakłady inwestycyjne netto w ujęciu realnym ($I_n = \dot{K}$), a $(1 - \tau_c) \rho K$ zysk sektora prywatnego po opodatkowaniu w ujęciu realnym. Symbol ρ oznacza stopę zysku z kapitału rzeczowego równą:

$$\rho = \left(Y^d - \omega L^d - \delta K - \frac{r\Lambda}{p} \right) / K. \quad (2.1.4)$$

Podobnie jak poprzednio, w prezentowanym dalej modelu KMGT decyzja o wysokości nakładów inwestycyjnych brutto ($I = I_n + \delta K$) zależy od wielu czynników i jest opisana następującym równaniem behawioralnym:

$$I = i_1(\rho^e - \rho^o) K + i_2(u - u^o) K + i_3(\lambda^o - \lambda) K + \hat{Y}^e K + \delta K. \quad (2.1.5)$$

Równanie to różni się od analogicznego równania z rozdziału pierwszego (zob. punkt 1.1.2) pod czterema względami. Pierwszą, najważniejszą różnicą jest to, że przedsiębiorcy, decydując o wielkości inwestycji, biorą pod uwagę aktualną wielkość swojego zadłużenia w stosunku do wartości kapitału opisaną zmienną $\lambda = \Lambda/pK$ i porównują ją z naturalną wartością tego wskaźnika λ^o , uważaną za bezpieczną. Jeżeli $\lambda > \lambda^o$, jest to powód skłaniający do ograniczania inwestycji. Po drugie na wielkość inwestycji ma wpływ różnica między oczekiwaną stopą zysku z kapitału ρ^e a stopą

³¹ Zysk z kapitału rzeczowego w liczniku ułamka (2.1.4) jest pomniejszany o spłatę odsetek od kredytu w ujęciu realnym $r\Lambda/p$, której nie ma w definicji analogicznego zysku w modelu z rozdziału pierwszego. Z drugiej strony dochody kapitałowe sektora prywatnego w rozdziale pierwszym oprócz zysku z kapitału rzeczowego obejmują także dochód z odsetek od obligacji rządowych (w modelu z rozdziału pierwszego obligacje rządowe nie są kupowane przez banki, lecz przez sektor prywatny (niefinansowy)).

zysku uważaną za normalną, oznaczoną symbolem ρ^o (poprzednio stopa zysku ρ^e była porównywana ze zmieniającą się w czasie realną stopą procentową). Trzecia różnica dotyczy tego, że obecnie (podobnie jak we wzorze (2.1.5)) oczekiwana stopa zysku zależy także od wysokości odsetek płaconych bankowi. Czwarta, najmniej istotna różnica polega na pominięciu obecnego w poprzednim modelu parametru ξ przedstawiającego stałą w czasie premię za ryzyko związane z inwestowaniem w sferze realnej w porównaniu z zakupem obligacji rządowych.

Różnica

$$\dot{\Lambda} - r\Lambda$$

przedstawia zmianę zasobów pieniężnych sektora prywatnego, równą różnicy między kredytami zaciągniętymi przez ten sektor w danym momencie (okresie) a kredytami spłaconymi wraz z odsetkami (rysunek 2.1).

Zapiszmy równanie $\dot{B} = pG + rB - pT$ w postaci:

$$\dot{B} - rB = pG - pT. \quad (2.1.6)$$

Dodatnia wartość tej różnicy przedstawia przyrost zasobów pieniężnych sektora prywatnego wynikający z nadwyżki dochodów ze sprzedaży rządowi dóbr i usług nad zapłaconymi podatkami. Ujemna wielkość różnicy przedstawia spadek takich zasobów.

Z powyższych spostrzeżeń wynika, że zmienna

$$\dot{M} = \dot{\Lambda} + \dot{B} - r(\Lambda + B) \quad (2.1.7)$$

przedstawia całkowity przyrost (lub spadek) zasobów pieniężnych sektora prywatnego i sektora publicznego w danym momencie (okresie). Przyrost ten jest równocześnie łącznym przyrostem zadłużenia obu sektorów, pomniejszonym o spłatę odsetek. W punkcie 2.2.2 tego rozdziału pokażemy, że zmiana tego zadłużenia pomniejszonego o spłatę odsetek jest równa zero:

$$\dot{M} = 0. \quad (2.1.8)$$

2.2. Model KMGT i jego stan stacjonarny

W tym podrozdziale przedstawimy model KMGT z kredytem inwestycyjnym w postaci intensywnej, wprowadzając odpowiednie zmienne opisujące zależności między wielkościami wyjściowymi. Następnie, opierając się na definicji stanu stacjonarnego, wyznaczymy jego wartości.

2.2.1. Kompletny układ równań modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym

Przedstawione w poprzednim punkcie nowe zmienne i nowe zależności są tymi, które odróżniają prezentowany poniżej model KMGT od modelu KMG z poprzedniego rozdziału. Pełne zestawienie równań modelu KMGT zaprezentowano w tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Model KMGT z kredytem inwestycyjnym

Lp.	Nazwa zmiennej	Równanie	Numer wzoru
Determinanty popytu			
1	Popyt na produkt	$Y^d = C + I + G$	(1.1.1)
2	Konsumpcja sektora prywatnego	$C = (1 - \tau_w) \omega L^d$	(1.1.2)
3	Popyt na pracę	$L^d = Y / x$	(1.1.23)
4	Stopa wzrostu wydajności pracy	$\hat{x} = n$	
5	Płaca realna i stopa wzrostu płacy realnej	$\omega = p, \quad \hat{\omega} = \hat{w} - \hat{p}$	(1.1.3)
6	Stopa wzrostu płac nominalnych	$\hat{w} = \beta_w (V - V^o) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^e + n$	(1.1.4)
7	Stopa wzrostu cen	$\hat{p} = \beta_p (u - u^o) + \kappa_p (\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p) \pi^e$	(1.1.5)
8	Przyrost oczekiwanej stopy inflacji	$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \pi^o - \pi^e),$ gdzie $\pi^o = \mu - n$	(1.1.6)
9	Stopa zatrudnienia	$V = \frac{L^d}{L}$, gdzie L – podaż pracy (stała w czasie)	(1.1.25)
10	Wskaźnik wykorzystania potencjału produkcyjnego	$u = \frac{Y}{Y^p}$	(1.1.22)
11	Produkcja potencjalna	$Y^p = y^p K$	(1.1.21)
12	Przyrost kapitału rzeczowego	$\dot{K} = i_1 (\rho^e - \rho^o) K + i_2 (\bar{u} - u^o) K + i_3 (\lambda^0 - \lambda) K + \hat{Y}^e K$	
13	Oczekiwana realna stopa zysku z kapitału rzeczowego	$\rho^e = \frac{Y^e - \omega L^d - \delta K - \frac{r\Lambda}{p}}{K}$	
	Rzeczywista realna stopa zysku z kapitału rzeczowego	$\rho = \frac{Y^d - \omega L^d - \delta K - \frac{r\Lambda}{p}}{K}$	

cd. tabeli 2.1

Lp.	Nazwa zmiennej	Równanie	Numer wzoru
14	Stopa wzrostu oczekiwanej sprzedaży	$\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$	(1.1.9)
15	Popyt inwestycyjny	$I = \dot{K} + \delta K$	(1.1.7)
Produkcja i zapasy			
16	Produkcja	$Y = Y^e + \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N)$	(1.1.20)
17	Produkcja przeznaczona na zapasy	$Z = \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N)$	
18	Pożądany poziom zapasów	$N^d = \beta_{N^d} Y^e$	(1.1.18)
19	Zmiana rzeczywistego poziomu zapasów	$\dot{N} = Y - Y^d$	(1.1.19)
Rynek pieniądza			
20	Zmiana zasobów pieniężnych sektora prywatnego i sektora publicznego	$\dot{M} = \dot{\Lambda} + \dot{B} - r(\Lambda + B)$	(2.1.7)
21	Przyrost nominalnej stopy procentowej	$\dot{r} = -\beta_r (r - r^o) + \beta_p (\hat{p} - \pi^o) + \beta_u (u - u^o)$	
Budżet państwa			
22	Podatki	$T = \tau_w \omega L^d + \tau_c \rho K$	
23	Popyt sektora rządowego	$G = gK$	(1.1.11)
24	Deficyt budżetowy	$\dot{B} = pG + rB - pT$	

2.2.2. Równość inwestycji i oszczędności

Podobnie jak w modelu KMG z rozdziału pierwszego (punkt 1.1.7), równanie modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym (2.1.5) opisuje jedynie, które czynniki wpływają na popyt inwestycyjny. Natomiast źródłem ich finansowania są oszczędności krajowe S . Na oszczędności krajowe składają się oszczędności sektora prywatnego S_p , sektora rządowego S_g oraz sektora bankowego S_b :

$$S = S_p + S_g + S_b. \quad (2.2.1)$$

W modelu KMGT zakładamy, że pracownicy najemni nie oszczędzają, a właściciele kapitału rzeczowego z kolei nie konsumują (podobnie jak w modelu KMG). Przyjmujemy zatem, że przedsiębiorcy całość opodatkowanych dochodów z kapitału rzeczowego przeznaczają na oszczędności. Możemy zatem zapisać, że realne oszczędności sektora prywatnego S_p wyraża równanie:

$$S_p = (1 - \tau_c) \rho K. \quad (2.2.2)$$

Kolejne źródło finansowania inwestycji krajowych stanowią oszczędności sektora publicznego S_g , które są różnicą między wpływami do budżetu z podatków T a jego wydatkami związanymi z konsumpcją publiczną i odsetkami z obligacji $G + \frac{rB}{p}$. Zatem realne oszczędności sektora publicznego są równe:

$$S_g = T - \left(G + \frac{rB}{p} \right). \quad (2.2.3)$$

Trzecie źródło finansowania inwestycji stanowią oszczędności sektora bankowego S_b . Definiujemy je jako realną wartość wpływów z odsetek z obligacji i kredytów inwestycyjnych:

$$S_b = r \frac{B}{p} + r \frac{\Lambda}{p}. \quad (2.2.4)$$

Po podstawieniu do wzoru (2.2.1) równań (2.2.2), (2.2.3) oraz (2.2.4) otrzymujemy:

$$S = \rho K - \tau_c \rho K + T - \left(G + \frac{rB}{p} \right) + r \frac{B}{p} + r \frac{\Lambda}{p}.$$

Następnie do tego wzoru podstawiamy wartość wyrażenia ρK ze wzoru (2.1.4):

$$S = Y^d - \omega L^d - \delta K - r \frac{\Lambda}{p} - \tau_c \rho K + T - \left(G + \frac{rB}{p} \right) + r \frac{B}{p} + r \frac{\Lambda}{p},$$

wartość Y^d ze wzoru (1.1.1):

$$S = C + I + G - \omega L^d - \delta K - r \frac{\Lambda}{p} - \tau_c \rho K + T - \left(G + \frac{rB}{p} \right) + r \frac{B}{p} + r \frac{\Lambda}{p}$$

oraz C i T (patrz tabela 2.1). Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} S = & (1 - \tau_w) \omega L^d + I + G - \omega L^d - \delta K - r \frac{\Lambda}{p} - \tau_c \rho K + \\ & + \tau_w \omega L^d + \tau_c \rho K - \left(G + \frac{rB}{p} \right) + r \frac{B}{p} + r \frac{\Lambda}{p}. \end{aligned}$$

Po redukcji wyrazów podobnych ostatecznie mamy:

$$S = I - \delta K = \dot{K}.$$

Zatem realne inwestycje netto są równe realnym oszczędnościom krajowym, czyli:

$$\dot{K} = S. \quad (2.2.5)$$

Korzystając z tego równania, wyprowadzimy poniżej wspomniane wcześniej równanie (2.1.8) pokazujące, że w rozpatrywanym modelu suma zmian zadłużenia sektora prywatnego i publicznego, którą utożsamiamy ze zmianą podaży pieniądza, jest zawsze równa zero:

$$\dot{M} = \dot{\Lambda} + \dot{B} - r(\Lambda + B) = 0.$$

Wyprowadzenie rozpoczniemy od spostrzeżenia, że ze wzorów (2.2.5) i (2.1.3) wynika, że zmiana zadłużenia sektora prywatnego $\dot{\Lambda}$, równa różnicy między inwestycjami netto sektora prywatnego $I_n = \dot{K}$ a jego zyskami po opodatkowaniu, spełnia równanie

$$\dot{\Lambda} = p(S_p + S_g + S_b - (1 - \tau_c)\rho K).$$

Po podstawieniu wzorów (2.2.2) i (2.2.4) do powyższego równania otrzymujemy:

$$\dot{\Lambda} = pS_g + r(B + \Lambda). \quad (2.2.6)$$

skąd wynika, że $\dot{\Lambda}$ jest równe sumie nominalnej wartości oszczędności sektora publicznego i odsetek od zadłużenia sektora prywatnego i publicznego.

Wielkość pS_g pomnożona przez minus jeden to z kolei zmiana zadłużenia sektora publicznego (deficyt rządowy). Ze wzorów (2.1.6) i (2.2.3) mamy bowiem:

$$\dot{B} = pG + rB - pT = -p\left(T - G - \frac{rB}{p}\right) = -pS_g. \quad (2.2.7)$$

Dodajemy do siebie stronami równania (2.2.6) oraz (2.2.7) i otrzymujemy:

$$\dot{\Lambda} + \dot{B} = rB + r\Lambda. \quad (2.2.8)$$

Oznacza to, że zamiana zadłużenia obu sektorów jest równa sumie odsetek od zaciągniętego kredytu. A więc ze wzorów (2.1.6) oraz (2.2.8) otrzymujemy ostatecznie, że wartość przyrostu zadłużenia pomniejszona o spłatę odsetek wynosi zero:

$$\dot{M} = \dot{\Lambda} + \dot{B} - r(\Lambda + B) = rB + r\Lambda - r(\Lambda + B) = 0.$$

Równanie $\dot{M} = 0$ jest tożsamością, która wskazuje na zamknięty obieg pieniądza w analizowanej gospodarce, przejawiający się jego stałym poziomem.

Powyższe przekształcenia pokazują, że cały nowy kredyt natychmiast zostaje przeznaczony na spłatę odsetek oraz na inwestycje i konsumpcję publiczną. W związ-

ku z tym dług w modelu stanowi pewną część kapitału oraz wydatków rządowych. W dalszej części pracy pokażemy, że na ścieżce równomiernego wzrostu zadłużenie obu sektorów rośnie ze stałą stopą wzrostu równą stopie wzrostu wydajności pracy.

Tożsamość $\dot{M} = 0$ może zostać wyprowadzona również dla modelu KMGT przedstawionego w pracy Charpe’a i in. (2011, rozdział 4), ale nie została ona zauważona przez autorów. Co więcej, wśród równań swojego modelu niepotrzebnie umieścili oni równanie różniczkowe opisujące dynamikę podaży pieniądza, a w jego wersji intensywnej – dynamikę zmian podaży pieniądza na jednostkę kapitału, a następnie eksploatowali te równania przy wyznaczaniu stanu stacjonarnego. W rzeczywistości równania te nie opisują żadnej dynamiki, gdyż funkcje pojawiające się po ich prawej stronie są w każdym momencie równe zero. Z tego względu w modelu w postaci intensywnej prezentowanym w kolejnym punkcie, w odróżnieniu od Charpe’a i in. (2011, rozdział 4), nie ma równania opisującego dynamikę podaży pieniądza na jednostkę kapitału.

2.2.3. Model KMGT w postaci intensywnej

W tym punkcie przedstawimy model KMGT w postaci intensywnej. Żeby to zrobić, musimy najpierw zdefiniować zmienne przedstawiające proporcje między zmiennymi wyjściowymi modelu.

Definiujemy zatem następujące zmienne modelu KMGT w postaci intensywnej:

- płace realne w stosunku do wydajności pracy lub inaczej udział płac w PKB:

$$U = \frac{\omega}{x},$$
- pracochłonność pełnego zatrudnienia (stosunek efektywnej pracy do kapitału rzeczowego): $l = \frac{xL}{K},$
- oczekiwana sprzedaż na jednostkę kapitału rzeczowego: $y^e = \frac{Y^e}{K},$
- wielkość zapasów na jednostkę kapitału rzeczowego: $v = \frac{N}{K},$
- stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału rzeczowego: $b = \frac{B}{pK}.$
- stosunek zadłużenia do nominalnej wartości kapitału rzeczowego: $\lambda = \frac{\Lambda}{pK}.$

Wyprowadzenie równań modelu w postaci intensywnej

Pierwszym równaniem modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym w postaci intensywnej jest równanie opisujące stopę wzrostu stosunku płac realnych do wydajności pracy $\hat{U}$ (stosunek wynagrodzeń do PKB). Żeby wyznaczyć stopę wzrostu $\hat{U}$, skorzystamy z wcześniej zdefiniowanych równań opisujących rzeczywistą stopę inflacji $\hat{p}$ (wzór (1.1.5)) oraz stopę wzrostu płac nominalnych $\hat{w}$ (wzór (1.1.4)):

$$\hat{p} = \beta_p (u - u^o) + \kappa_p (\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p) \pi^e,$$

$$\hat{w} = \beta_w (V - V^o) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^e + n.$$

Przypomnijmy, że równania te możemy zapisać równoważnie jako równania (1.2.4) i (1.2.3) odpowiednio:

$$\hat{p} = \kappa \left(\kappa_p \beta_w (V - V^o) + \beta_p (u - u^o) \right) + \pi^e,$$

$$\hat{w} = \kappa \left(\beta_w (V - V^o) + \kappa_w \beta_p (u - u^o) \right) + \pi^e + n,$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p}$, $\kappa_w \kappa_p \neq 1$. Wykorzystując definicję zmiennej przedstawiającej płacę realne w stosunku do wydajności pracy $U = \frac{\omega}{x}$, możemy wyznaczyć jej stopę wzrostu:

$$\hat{U} = \hat{w} - \hat{p} - \hat{x}.$$

Podstawiając do tego wzoru równania (1.2.3) i (1.2.4) oraz stopę wzrostu wydajności pracy $\hat{x} = n$, otrzymujemy pierwsze równanie modelu w postaci intensywnej:

$$\hat{U} = \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V - V^o) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - u^o) \right),$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p}$, $\kappa_w \kappa_p \neq 1$.

Drugim równaniem modelu jest równanie opisujące stopę wzrostu pracochłonności pełnego zatrudnienia $\left(l = \frac{xL}{K} \right)$, co zapisujemy jako:

$$\hat{l} = \hat{x} + \hat{L} - \hat{K}. \quad (2.2.9)$$

Równanie opisujące przyrost kapitału rzeczowego (tabela 2.1):

$$\dot{K} = i_1 (\rho^e - \rho^o) K + i_2 (u - u^o) K + i_3 (\lambda^o - \lambda) K + \hat{Y}^e K$$

dzielimy obustronnie przez kapitał rzeczowy K . Dostajemy równanie opisujące stopę wzrostu kapitału rzeczowego:

$$\hat{K} = i_1 (\rho^e - \rho^o) + i_2 (u - u^o) + i_3 (\lambda^o - \lambda) + \hat{Y}^e, \quad (2.2.10)$$

gdzie $\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$ oraz $\rho^e = y^e - U y - \delta - r \lambda$.

Do wzoru (2.2.9) podstawiamy stopę wzrostu podaży pracy $\hat{L} = 0$, stopę wzrostu wydajności pracy $\hat{x} = n$ oraz wyrażenie (2.2.10). Po przekształceniach otrzymujemy drugie równanie modelu w postaci intensywnej:

$$\hat{l} = -i_1(\rho^e - \rho^o) - i_2(u - u^o) - i_3(\lambda^0 - \lambda) + \\ - \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V - V^o) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u - u^o) \right) - \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right).$$

Trzecie równanie modelu KMG T w postaci intensywnej przedstawia zmianę oczekiwań inflacyjnych:

$$\pi^e = \beta_{\pi^e} \left(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \pi^o - \pi^e \right).$$

Czwarte równanie modelu opisuje stopę wzrostu oczekiwanego popytu na jednostkę kapitału rzeczowego $y^e = Y^e/K$. Z definicji tej zmiennej mamy:

$$\hat{y}^e = \hat{Y}^e - \hat{K}.$$

Po podstawieniu do tego wzoru kolejno: $\hat{K} = n - \hat{l}$, $\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$ oraz $\hat{\omega} = \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V - V^o) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u - u^o) \right) + n$ i po pewnych przekształceniach otrzymujemy czwarte równanie modelu:

$$\dot{y}^e = y^e \left(\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V - V^o) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u - u^o) \right) + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) + \hat{l} \right).$$

Piąte równanie opisuje przyrost zapasów na jednostkę kapitału rzeczowego:

$$\dot{v} = \frac{\dot{N}K - N\dot{K}}{K^2}.$$

Wykorzystamy następujące zależności: $N = Y - Y^d$, $\hat{K} = n - \hat{l}$, $v = N/K$, $y = Y/K$ i $y^d = Y^d/K$.

W konsekwencji podstawień definicji powyższych zmiennych otrzymujemy:

$$\dot{v} = y - y^d - v(n - \hat{l}).$$

Szóste równanie modelu w postaci intensywnej jest równaniem opisującym przyrost obligacji na jednostkę kapitału rzeczowego:

$$\dot{b} = \frac{\dot{B}Kp - B(\dot{K}p)}{(Kp)^2}.$$

Po kolejnych przekształceniach równanie to ma postać:

$$\dot{b} = \frac{\dot{B}Kp - B(\dot{K}p)}{(Kp)^2} = \frac{\dot{B}}{Kp} - \frac{B}{Kp} \cdot \frac{(\dot{K}p)}{Kp} = \frac{pG + rB - pT}{Kp} - b \frac{(\dot{K}p)}{Kp}.$$

Ostatecznie:

$$\dot{b} = g + rb - \frac{T}{K} - b(\hat{K} + \hat{p}).$$

Po podstawieniu do tego wzoru zmiennych $\hat{K} = n - \hat{l}$, $T = \tau_w \omega L^d + \tau_c \rho^e K$ i po pewnych przekształceniach otrzymujemy szóste równanie modelu:

$$\dot{b} = g + rb - \tau_c \rho - \tau_w U y - b(n - \hat{l} + \hat{p}).$$

Siódme równanie przedstawia przyrost zadłużenia firm w stosunku do nominalnej wartości kapitału rzeczowego $\lambda = \Lambda/pK$. Korzystając z definicji zmiennej λ , stopę wzrostu zadłużenia firm w stosunku do nominalnej wartości kapitału rzeczowego zapisujemy jako:

$$\hat{\lambda} = \hat{\Lambda} - \hat{p} - \hat{K}.$$

Po podstawieniu do tego wzoru $\hat{\Lambda} = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}$ oraz $\hat{\lambda} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$, mamy:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} - \hat{p} - \hat{K}.$$

Mnożąc obustronnie tę równość przez λ , dostajemy:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \lambda - (\hat{p} + \hat{K}) \lambda.$$

Kolejne przekształcenia prowadzą do:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \cdot \frac{\Lambda}{pK} - (\hat{p} + \hat{K}) \lambda.$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór opisujący przyrost zadłużenia firm w stosunku do kapitału rzeczowego:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\Lambda}}{pK} - (\hat{p} + \hat{K}) \lambda. \quad (2.2.11)$$

Z równania budżetowego $pI_n = p(1 - \tau_c)\rho K + \dot{\Lambda}$ możemy wyznaczyć równanie opisujące przyrost zadłużenia firm:

$$\dot{\Lambda} = pI_n - p(1 - \tau_c)\rho K. \quad (2.2.12)$$

Po podstawieniu zależności (2.2.12) do wzoru (2.2.11) otrzymujemy:

$$\dot{\lambda} = \frac{pI_n - p(1 - \tau_c)\rho K}{pK} - (\hat{p} + \hat{K})\lambda.$$

W kolejnych przekształceniach doprowadzamy to równanie do postaci:

$$\dot{\lambda} = (1 - \lambda)\hat{K} - (1 - \tau_c)\rho - \hat{p}\lambda.$$

Podstawiamy do tego wzoru stopę wzrostu kapitału rzeczowego $\hat{K} = n - \hat{l}$. Ostatecznie otrzymujemy siódme równanie modelu w postaci intensywnej:

$$\dot{\lambda} = (1 - \lambda)(n - \hat{l}) - (1 - \tau_c)\rho - \hat{p}\lambda.$$

Ostatnie, ósme równanie modelu w postaci intensywnej stanowi reguła Taylora przedstawiająca przyrost stopy procentowej (zob. wzór (2.1.2)):

$$\dot{r} = -\beta_i(r - r^o) + \beta_p(\hat{p} - \pi^o) + \beta_u(u - u^o).$$

Ostatecznie dostajemy model KMGT z kredytem inwestycyjnym w postaci intensywnej opisany układem ośmiu nieliniowych równań różniczkowych:

$$\dot{U} = U\kappa(\beta_w(1 - \kappa_p)(V - V^o) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u - u^o)), \quad (2.2.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{l} = & l(-i_1(\rho^e - \rho^o) - i_2(u - u^o) - i_3(\lambda^o - \lambda)) + \\ & - l\left(\kappa(\beta_w(1 - \kappa_p)(V - V^o) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u - u^o)) - \beta_{y^e}\left(\frac{y^d}{y^e} - 1\right)\right), \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e}(\alpha\hat{p} + (1 - \alpha)\pi^o - \pi^e), \quad (2.2.15)$$

$$\dot{y}^e = y^e\left(\hat{U} + \beta_{y^e}\left(\frac{y^d}{y^e} - 1\right) + \hat{l}\right), \quad (2.2.16)$$

$$\dot{v} = y - y^d - v(n - \hat{l}), \quad (2.2.17)$$

$$\dot{b} = g + rb - \tau_c\rho - \tau_w Uy - b(n - \hat{l} + \hat{p}), \quad (2.2.18)$$

$$\dot{\lambda} = (1 - \lambda)(n - \hat{l}) - (1 - \tau_c) \rho - \hat{p} \lambda, \quad (2.2.19)$$

$$\dot{r} = -\beta_{i_1}(r - r^o) + \beta_{i_p}(\hat{p} - \pi^o) + \beta_{i_u}(u - u^o), \quad (2.2.20)$$

$$\text{gdzie: } \rho^e = y^e - Uy - \delta - r\lambda, \quad \kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p}, \quad \hat{p} = \kappa(\kappa_p \beta_w(V - V^o) + \beta_p(u - u^o)) + \pi^e,$$

$$\rho = y^d - Uy - \delta - r\lambda.$$

Popyt na jednostkę kapitału y^d i produkcja na jednostkę kapitału y są powiązane następującym układem równań liniowych:

$$y^d = (1 - \tau_w)yU + i_1(\rho^e - \rho^o) + i_2(u - u^o) + i_3(\lambda^o - \lambda) + \delta + g + \hat{Y}^e, \quad (2.2.21)$$

$$y = y^e + \beta_n \beta_{N^d} y^e - \beta_n v + y^e \beta_z \hat{Y}^e, \quad (2.2.22)$$

$$\text{gdzie } \hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right), \quad \hat{\omega} = \kappa(\beta_w(1 - \kappa_p)(V - V^o) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u - u^o)) + n.$$

Po rozwiązaniu układu (2.3.21)–(2.3.22) otrzymujemy:

$$y = \frac{AF - CE}{AD - BE}, \quad y^d = \frac{CD - BF}{AD - BE},$$

gdzie:

$$A = \left(1 - \frac{\beta_{y^e}}{y^e} \right),$$

$$B = \left(i_1 U - \frac{i_2}{y^p} - \frac{\kappa \beta_w(1 - \kappa_p)}{l} + \frac{\kappa \beta_p(1 - \kappa_w)}{y^p} - (1 - \tau_w) U \right),$$

$$C = i_1(y^e - \delta - r\lambda - \rho^o) - i_2 u^o + i_3(\lambda^o - \lambda) + n + g + \delta + \kappa(\beta_p(1 - \kappa_w)u^o - \beta_w(1 - \kappa_p)V^o) - \beta_{y^e},$$

$$D = \left(1 - \frac{y^e \beta_z \kappa \beta_w(1 - \kappa_p)}{l} + \frac{y^e \beta_z \kappa \beta_p(1 - \kappa_w)}{y^p} \right),$$

$$E = -\beta_z \beta_{y^e},$$

$$F = y^e \left(1 + \beta_n \beta_{N^d} + \beta_z \left(\kappa \beta_p(1 - \kappa_w)u^o - \kappa \beta_w(1 - \kappa_p)V^o + n - \beta_{y^e} \right) \right) - \beta_n v.$$

2.2.4. Stan stacjonarny modelu KMG

W tej części rozdziału wyznaczmy stan stacjonarny modelu KMG z kredytem inwestycyjnym. Żeby to zrobić, skorzystamy z definicji stanu stacjonarnego.

Definicja. Stanem stacjonarnym modelu w postaci intensywnej (2.2.13)–(2.2.20) nazywamy taki nieujemny wektor $(\bar{U}, \bar{l}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b}, \bar{\lambda}, \bar{r})$, dla którego prawa strona tego układu równań jest równa zero oraz rzeczywista inflacja w stanie stacjonarnym ma wartość równą wartości celu inflacyjnego $\bar{\pi}$.

Udowodnienie istnienia stanu stacjonarnego modelu sprowadza się zatem do wyznaczenia zestawu ośmiu wartości zmiennych będącego rozwiązaniem układu równań (2.2.13)–(2.2.20), dla którego prawa strona tych równań jest równa zero oraz rzeczywista inflacja w stanie stacjonarnym ma wartość równą wartości celu inflacyjnego $\bar{\pi}$.

Po przyrównaniu prawej strony układu równań (2.2.13)–(2.2.20) do zera otrzymujemy układ:

$$0 = U\kappa(\beta_w(1-\kappa_p)(V-V^o) - \beta_p(1-\kappa_w)(u-u^o)), \quad (2.2.23)$$

$$0 = l(-i_1(\rho^e - \rho^o) - i_2(u-u^o) - i_3(\lambda^o - \lambda)) + \\ - l\left(\kappa(\beta_w(1-\kappa_p)(V-V^o) - \beta_p(1-\kappa_w)(u-u^o)) - \beta_{y^e}\left(\frac{y^d}{y^e} - 1\right)\right), \quad (2.2.24)$$

$$0 = \beta_{\pi^e}(\alpha\hat{p} + (1-\alpha)\pi^o - \pi^e), \quad (2.2.25)$$

$$0 = y^e\beta_{y^e}\left(\frac{y^d}{y^e} - 1\right), \quad (2.2.26)$$

$$0 = y - y^d - vn, \quad (2.2.27)$$

$$0 = g + rb - \tau_c\rho - \tau_w Uy - b(n - \hat{l} + \hat{p}), \quad (2.2.28)$$

$$0 = (1-\lambda)(n - \hat{l}) - (1-\tau_c)\rho - \hat{p}\lambda, \quad (2.2.29)$$

$$0 = -\beta_{i_i}(r - r^o) + \beta_{i_p}(\hat{p} - \pi^o) + \beta_{i_u}(u - u^o). \quad (2.2.30)$$

Zgodnie z tym, że $\dot{l} = 0$, z czego wynika $\hat{l} = 0$, oraz z warunku $\hat{l} = n - \hat{K}$ (wzór (2.2.9)) mamy:

$$\hat{K} = n. \quad (2.2.31)$$

Oznacza to, że w stanie stacjonarnym kapitał rzeczowy rośnie ze stałą stopą wzrostu równą n .

Z równania (2.2.25) wynika, że:

$$\hat{p} = \frac{\pi^e - (1 - \alpha) \pi^o}{\alpha}.$$

Zgodnie z definicją stanu stacjonarnego w stanie tym aktualna inflacja $\bar{\pi}$ jest równa celowi inflacyjnemu, tzn. $\bar{\pi} = \pi^o$, mamy więc:

$$\frac{\pi^e - (1 - \alpha) \bar{\pi}}{\alpha} = \bar{\pi}.$$

Stąd mamy:

$$\pi^e = \bar{\pi} = \pi^o.$$

Widzimy, że w stanie stacjonarnym oczekiwania inflacyjne pokrywają się z rzeczywistą stopą inflacji:

$$\bar{\pi}^e = \hat{p} = \bar{\pi} = \pi^o. \quad (2.2.32)$$

Następnie z równania (2.2.26), przy założeniu $y^e > 0$ oraz $\beta_{y^e} > 0$, otrzymujemy:

$$y^d = y^e. \quad (2.2.33)$$

Oznacza to, że w stanie stacjonarnym popyt na jednostkę kapitału jest równy oczekiwanej sprzedaży na jednostkę kapitału.

W kolejnym kroku do równania (1.2.4) podstawiamy otrzymaną równość (2.2.32). Po przekształceniach otrzymujemy:

$$(V - V^o) = -\frac{\beta_p}{\kappa_p \beta_w} (u - u^o).$$

Po podstawieniu tego równania do zależności (2.2.23) otrzymujemy:

$$0 = U\kappa \left(-(1 - \kappa_p) \frac{\beta_p}{\kappa_p} (u - u^o) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - u^o) \right). \quad (2.2.34)$$

Równanie to przy założeniu $U, \kappa, \beta_p > 0$ oraz $\kappa_p, \kappa_w \neq 1$ ma rozwiązanie, gdy $(u - u^o) = 0$. Oznacza to, że w stanie stacjonarnym produkcja na jednostkę kapitału jest równa:

$$\bar{y} = u^o y^p. \quad (2.2.35)$$

Z tego wzoru i z definicji wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej $u = y/y^p$ wynika także, że w stanie stacjonarnym wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnej jest równy jego naturalnej wartości $u = \bar{u}$.

Po podstawieniu równania (2.3.35) do wzoru (2.3.34) otrzymujemy prędkość pełnego zatrudnienia w stanie stacjonarnym:

$$\bar{l} = \frac{u^o y^p}{\bar{v}}.$$

Następnie do wzoru (2.2.30) podstawiamy $\frac{y}{y^p} = u^o$ i $\hat{p} = \bar{\pi}$. Dostajemy:

$$\bar{r} = r^o. \quad (2.2.36)$$

gdzie r^o to parametr modelu oznaczający wartość nominalnej stopy procentowej w stanie stacjonarnym (naturalna stopa procentowa) (zob. wzór (2.1.2)).

Z równania (2.2.27) możemy wyznaczyć wartość zmiennej v w stanie stacjonarnym:

$$\bar{v} = \frac{y - y^d}{n} = \frac{\bar{u}y^p - y^d}{n}. \quad (2.2.37)$$

W równaniu tym nie znamy jedynie wartości zmiennej y^d w stanie stacjonarnym. W celu wyznaczenia tej wartości do wzoru:

$$y = y^e + \beta_n \beta_{N^d} y^e - \beta_n v + y^e \beta_z \left(\kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V - V^o) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - u^o) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right)$$

podstawiamy równania: $V = V^o$, $u = u^o$, $\bar{y} = u^o y^p$ oraz $y^d = y^e$. Po tych podstawieniach oraz przekształceniach otrzymujemy:

$$u^o y^p = y^d + \beta_n \beta_{N^d} y^d - \beta_n v + y^d \beta_z n.$$

Możemy z tego wyznaczyć zmienną v :

$$v = \frac{y^d (1 + \beta_n \beta_{N^d} + \beta_z n) - u^o y^p}{\beta_n}. \quad (2.2.38)$$

Porównujemy ze sobą wyrażenia (2.2.37) oraz (2.2.38). Otrzymujemy zależność:

$$\frac{u^o y^p - y^d}{n} = \frac{y^d (1 + \beta_n \beta_{N^d} + \beta_z n) - u^o y^p}{\beta_n}.$$

Możemy z niej wyznaczyć popyt w stosunku do kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym:

$$\bar{y}^d = \frac{\beta_n + n}{(1 + \beta_n \beta_{N^d} + \beta_z n) n + \beta_n} u^o y^p = \gamma \bar{y}. \quad (2.2.39)$$

gdzie $\gamma = \frac{\beta_n + n}{(1 + \beta_n \beta_{N^d} + \beta_z n) n + \beta_n}$, $\bar{y} = u^o y^p$.

Zatem ze wzorów (2.2.39) oraz (2.2.33) wynika, że:

$$\bar{y}^e = \gamma \bar{y}.$$

Podstawiając do wzoru (2.2.37) równanie (2.2.39), możemy wyznaczyć wartość zmiennej v w stanie stacjonarnym:

$$\bar{v} = \frac{\bar{y} - \gamma \bar{y}}{n} = \frac{1 - \gamma}{n} \bar{y}.$$

Popyt na jednostkę kapitału rzeczowego możemy zapisać jako sumę:

$$y^d = c + \hat{K} + \delta + g,$$

gdzie: $c = C/K$, $\hat{K} = I/K$, $g = G/K$. W stanie stacjonarnym $\hat{K} = n$ (wzór (2.2.31)), czyli powyższe równanie w stanie stacjonarnym ma postać:

$$\bar{y}^d = c + n + \delta + g,$$

gdzie $\bar{y}^d = \gamma \bar{y}$. Z tego wzoru możemy wyznaczyć stosunek konsumpcji sektora prywatnego do kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym:

$$\bar{c} = \bar{y}^d - n - \delta - g.$$

Podzielmy równanie $C = (1 - \tau_w) \omega L^d$ przez kapitał rzeczowy K . Po przekształceniach otrzymujemy:

$$c = (1 - \tau_w) y U.$$

W stanie stacjonarnym równanie to ma postać:

$$\bar{c} = (1 - \tau_w) \bar{y} \bar{U}.$$

Z tej zależności możemy wyznaczyć udział płac w PKB w stanie stacjonarnym:

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1 - \tau_w) \bar{y}},$$

gdzie $\bar{c} = \bar{y}^d - n - \delta - g$.

W stanie stacjonarnym mamy $y^d = y^e$, a więc z definicji zmiennych $\rho^e = y^e - U y - \delta - r \lambda$ i $\rho = y^d - U y - \delta - r \lambda$ wynika, że w stanie stacjonarnym oczekiwana stopa zysku z kapitału rzeczowego jest równa rzeczywistej wartości stopy zysku z kapitału rzeczowego:

$$\bar{\rho}^e = \bar{\rho}. \quad (2.2.40)$$

Żeby wyznaczyć stosunek zadłużenia do nominalnej wartości kapitału firm w stanie stacjonarnym $\bar{\lambda}$, skorzystamy z zależności (2.2.24), (2.2.29) oraz (2.2.40). Równanie (2.2.24) w stanie stacjonarnym po przekształceniach ma postać:

$$i_3(\lambda^o - \bar{\lambda}) = -i_1(\bar{\rho} - \rho^o). \quad (2.2.41)$$

Z równania (2.2.29) możemy wyznaczyć $\bar{\rho}$:

$$\bar{\rho} = \frac{(1-\lambda)n - \bar{\pi}\lambda}{1-\tau_c}. \quad (2.2.42)$$

Po podstawieniu tej zmiennej do wzoru (2.2.41) otrzymujemy równanie:

$$i_3(\lambda^o - \bar{\lambda}) = -i_1 \left(\frac{(1-\lambda)n - \bar{\pi}\lambda}{1-\tau_c} - \rho^o \right),$$

którego rozwiązaniem jest wartość zmiennej λ w stanie stacjonarnym:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda^o i_3(1-\tau_c) + n i_1 - i_1 \rho^o(1-\tau_c)}{i_3(1-\tau_c) + n i_1 + \bar{\pi} i_1}.$$

Znając wartość zmiennej λ w stanie stacjonarnym, ze wzoru (2.2.42) możemy wyznaczyć zysk w stanie stacjonarnym:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}^e = \frac{(1-\bar{\lambda})n - \bar{\pi}\bar{\lambda}}{1-\tau_c}.$$

Podstawiając wartości wyznaczonych powyżej zmiennych w stanie stacjonarnym do definicji stopy zysku z kapitału $\rho = y^d - U y - \delta - r\lambda$, otrzymujemy:

$$\bar{\rho} = \bar{y}^d - \bar{U} \bar{y} - \delta - r^o \bar{\lambda},$$

gdzie r^o to parametr oznaczający wartość nominalnej stopy procentowej w stanie stacjonarnym. Z powyższego wzoru wynika, że aby stan stacjonarny istniał i był jedyny, parametr r^o musi mieć wartość:

$$r^o = \frac{\bar{y}^d - \bar{U} \bar{y} - \delta - \bar{\rho}}{\bar{\lambda}}.$$

Na podstawie tej zależności oraz wzoru (2.2.36) możemy wywnioskować, że od przyjętej wartości parametru r^o (docelowa nominalna stopa procentowa) zależy istnienie stanu stacjonarnego modelu KMG-T.

W kolejnym kroku ze wzoru (2.2.28) postaci: $0 = g + rb - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{y} - b(n + \bar{\pi})$ możemy wyznaczyć wartość zmiennej b w stanie stacjonarnym:

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{y}}{n + \bar{\pi} - \bar{r}}.$$

Podsumowując powyższe wyprowadzenia, można powiedzieć, że stan stacjonarny modelu KMGT w postaci intensywnej (2.2.13)–(2.2.20), przy założeniu, że w stanie stacjonarnym rzeczywista stopa inflacji jest równa celowi inflacyjnemu, opisują równania:

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1 - \tau_w) \bar{u} y^p},$$

$$\bar{l} = \frac{u^o y^p}{\bar{V}},$$

$$\bar{y}^d = \frac{\bar{u} y^p \beta_n + \bar{u} y^p n}{(1 + \beta_n \beta_{N^d} + \beta_z n) n + \beta_n}, \quad \bar{y}^e = \bar{y}^d,$$

$$\bar{\pi}^e = \bar{\pi},$$

$$\bar{v} = \frac{u^o y^p - \bar{y}^e}{n},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda^o i_3 (1 - \tau_c) + n i_1 - i_1 \rho^o (1 - \tau_c)}{i_3 (1 - \tau_c) + n i_1 + \bar{\pi} i_1},$$

$$\bar{r} = r^o = \frac{\bar{y}^d - \bar{U} \bar{y} - \delta - \bar{\rho}}{\bar{\lambda}},$$

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{y}}{n + \bar{\pi} - \bar{r}},$$

$$\bar{y} = \bar{u} y^p,$$

$$\bar{\rho} = \frac{(1 - \bar{\lambda}) n - \bar{\pi} \bar{\lambda}}{1 - \tau_c}, \quad \bar{\rho}^e = \bar{\rho},$$

$$\bar{c} = \bar{y}^d - n - \delta - g.$$

Ze wzorów tych wynika, że w gospodarce opisanej modelem KMGT z kredytem inwestycyjnym możliwy jest równomierny wzrost gospodarczy (istnieje stan stacjonarny) ze stopą wzrostu równą stopie wzrostu wydajności pracy n .

2.2.5. Analiza wrażliwości stanu stacjonarnego

Zaprezentowane w poprzednim punkcie wzory umożliwiają analizę wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany wartości parametrów modelu. Podobnie jak w rozdziale pierwszym, przed przystąpieniem do takiej analizy dokonamy przekształcenia tych wzorów tak, aby uzyskać wartości zmiennych na jednostkę produkcji (PKB), a nie na jednostkę kapitału, co uczyni analizę bardziej standardową. Przekształcenie powyższe łatwo uzyskujemy, korzystając z tego, że w stanie stacjonarnym, jak wynika z równania $\bar{y} = \bar{u}y^p$, stosunek produkcji do kapitału trwałego określony jest wzorem:

$$\frac{Y}{K} = \bar{u}y^p.$$

W rezultacie wspomnianego przekształcenia wartości zmiennych modelu wyjściowego na jednostkę produkcji (PKB) spełniają w stanie stacjonarnym następujące równania:

- stosunek całkowitego popytu finalnego do PKB:

$$\frac{Y^d}{Y} = \frac{\beta_n + n}{(1 + \beta_n \beta_{N^d} + \beta_z n)n + \beta_n},$$

- stosunek konsumpcji do PKB:

$$\frac{C}{Y} = \frac{\gamma u^o y^p - (n + \delta + g)}{\bar{u}y^p},$$

- stosunek inwestycji do PKB:

$$\frac{I}{Y} = \frac{n + \delta}{\bar{u}y^p},$$

- stosunek konsumpcji publicznej do PKB:

$$\frac{G}{Y} = \frac{g}{\bar{u}y^p},$$

- stosunek długu publicznego (obligacji) do PKB:

$$\frac{B}{pY} = \frac{g - \tau_c \bar{p} - \tau_w \frac{\gamma u^o y^p - (n + \delta + g)}{(1 - \tau_w)}}{(n + \bar{\pi} - \bar{r}) \bar{u}y^p},$$

- stosunek długu prywatnego (kredytu inwestycyjnego) do PKB

$$\frac{\Lambda}{pY} = \frac{\lambda^o i_3 (1 - \tau_c) + n i_1 - i_1 \rho^o (1 - \tau_c)}{(i_3 (1 - \tau_c) + n i_1 - \bar{\pi} i_1) u^o y^p}.$$

Analizę wrażliwości przeprowadzono także dla zmiennych:

- stopa zysku z kapitału rzeczowego:

$$\bar{\rho} = \frac{(1 - \bar{\lambda}) n}{(1 - \tau_c)},$$

$$\text{gdzie } \bar{\lambda} = \frac{\lambda^o i_3 (1 - \tau_c) + n i_1 - i_1 \rho^o (1 - \tau_c)}{(i_3 (1 - \tau_c) + n i_1 - \bar{\pi} i_1) u^o y^p},$$

- udział płac w PKB:

$$\bar{U} = \frac{\gamma \bar{u} y^p - (n + \delta + g)}{(1 - \tau_w) u^o y^p},$$

$$\text{gdzie } \gamma = \frac{\beta_n + n}{(1 + \beta_n \beta_{N^d} + \beta_z n) n + \beta_n}.$$

Wyniki analizy wrażliwości równowagowych wartości powyższych zmiennych na zmiany wartości wybranych parametrów modelu mających wpływ na wartości tych zmiennych przedstawiono w tabeli 2.2. Znak plus (+) w tabeli oznacza, że wartość danej zmiennej w stanie stacjonarnym rośnie ze wzrostem wartości wybranego parametru, znak minus (−), że maleje. Znak zapytania (?) oznacza, że ze względu na postać równania zależności nie można jednoznacznie określić. Znaki te zostały ustalone na podstawie wzorów badanych zmiennych oraz ich pochodnych względem badanego parametru.

W przeprowadzonej analizie wrażliwości zbadano wpływ następujących parametrów na równowagę: β_n – parametru reakcji produkcji na odchylenie rzeczywistego poziomu zapasu od pożądanego, β_z – parametru reakcji produkcji na przyrost oczekiwanej sprzedaży, β_{N^d} – pożądanego stosunku zapasów do oczekiwanej sprzedaży, $\bar{u}$ – naturalnego poziomu wykorzystania mocy produkcyjnych, y^p – potencjalnej efektywności kapitału (stosunek maksymalnej produkcji Y^p do kapitału), n – stopy wzrostu wydajności pracy, δ – współczynnika deprecjacji kapitału, g – stosunku popytu sektora rządowego do kapitału, τ_w , τ_c – stawek podatkowych, $\bar{V}$ – stopy zatrudnienia, $\bar{\pi}$ – wskaźnika inflacji.

Tabela 2.2. Analiza wrażliwości stanu równowagi modelu w postaci intensywnej

Zmienna	β_n	β_z	β_{N^d}	$\bar{u}$	y^p	n	δ	g	τ_w	τ_c	$\bar{V}$	$\bar{\pi}$
$U = \omega L/Y$	?	–	–	+	+	–	–	–	+	0	0	0
Y^d/Y	?	–	–	0	0	–	0	0	0	0	0	0
C/Y	?	–	–	+	+	–	–	–	0	0	0	0
I/Y	0	0	0	–	–	+	+	0	0	0	0	0
G/Y	0	0	0	–	–	0	0	0	0	0	0	0
B/pY	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0	–
$\bar{\rho}$	?	?	?	+	+	?	0	0	0	?	0	–
Δ/pY	0	0	0	–	–	?	0	0	0	?	0	+

Analiza przedstawiona w tabeli 2.2 w połączeniu ze wzorami opisującymi stan stacjonarny prowadzi do kilku interesujących wniosków na temat zależności tych proporcji od parametrów modelu.

Wniosek 1. Im większa stopa wzrostu wydajności pracy n , tym mniejszy udział konsumpcji w PKB oraz udział płac w PKB, a większy udział inwestycji w PKB.

Wniosek 2. Udział konsumpcji w PKB nie zależy od stawki podatkowej τ_w . Z kolei stawka ta wpływa pozytywnie na udział wynagrodzeń w PKB. Konsumpcja natomiast zależy od tej stawki, a wynagrodzenia nie, co oznacza, że wartość PKB w stanie stacjonarnym zależy od stawki podatkowej τ_w .

Wniosek 3. Stopa zysku z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym zależy od stawki podatku od wynagrodzeń τ_w , chociaż stawka ta nie ma bezpośredniego wpływu na wielkość zysku z kapitału rzeczowego. Jednak stawka ta wpływa na konsumpcję sektora prywatnego będącą składnikiem całkowitego popytu, który wpływa na stopę zysku z kapitału rzeczowego. Wyjaśnia to, dlaczego stawka τ_w wpływa na stopę zysku z kapitału. Ponadto stopa zysku z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym bezpośrednio zależy od stawki podatku od zysku z kapitału rzeczowego τ_c . Warto również odnotować, że na stopę zysku z kapitału mają wpływ wartości parametrów reakcji β_n , β_z i β_{N^d} , od których zależy nadwyżka produkcji ponad oczekiwaną sprzedaż. Jednak na podstawie wzoru na zmienną oraz jej pochodną trudno określić, jaki jest wpływ wartości tych parametrów na tę stopę. Niemniej jednak można to ocenić za pomocą metody empirycznej.

Wniosek 4. Stosunek zadłużenia do PKB w stanie stacjonarnym jest powiązany ze wszystkimi stawkami podatkowymi, a także ze stopą wzrostu wydajności pracy. Jednak postać równania określającego tę zmienną nie pozwala na dokładną ocenę wpływu na nią wartości tych parametrów.

Wniosek 5. Podobnie jak w modelu KMG z rozdziału pierwszego, na podstawie wzoru na zmienną b (stosunek podaży obligacji do PKB) można ustalić jedynie

kierunek wpływu stopy inflacji w stanie stacjonarnym na tę zmienną. Jak wynika z tabeli 2.2, wzrost stopy inflacji w stanie stacjonarnym przyczynia się do zmniejszenia stosunku podaży obligacji do PKB. Wpływ wartości pozostałych parametrów może zostać zbadany metodami empirycznymi.

Podsumowanie

W rozdziale tym przedstawiono kolejną autorską wersję modelu KMG. Zaprezentowany model jest modyfikacją modelu KMG przedstawionego w rozdziale pierwszym. Pierwsza modyfikacja polega na uwzględnieniu w modelu dodatkowego źródła finansowania inwestycji prywatnych, którym jest kredyt inwestycyjny. Druga dotyczy zmiany sposobu wyznaczania nominalnej stopy procentowej. W nowej wersji modelu stopa ta zależy od równania Taylora.

Kolejne modyfikacje modelu KMG mają na celu uzyskanie lepszego opisu gospodarki, bardziej zbliżonego do rzeczywistości, lepiej oddającego rzeczywiste zależności zachodzące w gospodarce. Przedstawiony model w porównaniu z modelem z rozdziału pierwszego (a także w porównaniu z oryginalnymi modelami KMG) jest ulepszonym opisem funkcjonowania gospodarki, który pozwala uzyskiwać, oprócz wyników jakościowych prezentowanych w tym rozdziale, również ciekawe wyniki ilościowe, które zostaną przedstawione w rozdziale czwartym.

ROZDZIAŁ 3

Stabilność stanów stacjonarnych
modeli KMG i KMGT

W dwóch poprzednich rozdziałach monografii przedstawiliśmy dwie autorskie wersje modelu KMG oraz przeanalizowaliśmy warunki istnienia i jednoznaczności stanów stacjonarnych tych modeli w postaci intensywnej. W niniejszym rozdziale zajmiemy się centralnym zagadnieniem monografii, którym jest udowodnienie twierdzeń o lokalnej asymptotycznej stabilności tych stanów, co jest równoważne z wykazaniem zbieżności kątowej gospodarek opisanych równaniami modeli KMG w ich wyjściowych postaciach (tzn. nie w postaci intensywnej) do odpowiednich ścieżek równomiernego wzrostu ze stopą równą stopie wzrostu wydajności pracy (przy założonej zerowej stopie wzrostu podaży pracy).

3.1. Twierdzenie o stabilności równowagi w modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza

Prezentację dowodów stabilności zaczniemy od dowodu stabilności modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza. Przed przystąpieniem do sformułowania twierdzenia o stabilności i zaprezentowaniem jego dowodu przypomnijmy intensywną postać pierwszej wersji modelu KMG, to znaczy autorskiej wersji zaprezentowanej w rozdziale pierwszym – wzory (1.1.7)–(1.1.13).

Model KMG z egzogeniczną podażą pieniądza składa się z następujących nieliniowych równań różniczkowych:

$$\dot{U} = F_1(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d), \quad (3.1.1)$$

$$\dot{l} = F_2(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d), \quad (3.1.2)$$

$$\dot{m} = F_3(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d), \quad (3.1.3)$$

$$\dot{\pi}^e = F_4(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d), \quad (3.1.4)$$

$$\dot{y}^e = F_5(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d), \quad (3.1.5)$$

$$\dot{v} = F_6(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d), \quad (3.1.6)$$

$$\dot{b} = F_7(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d). \quad (3.1.7)$$

W modelu (3.1.1)–(3.1.7) oprócz zmiennych, których pochodne występują po lewej stronie prezentowanych równań, mamy do czynienia także z dwiema dodatkowymi zmiennymi. Są to produkcja na jednostkę kapitału y oraz popyt na jednostkę

kapitału y^d . Zmienne te powiązane są ze sobą oraz z pozostałymi zmiennymi modelu (3.1.1)–(3.1.7) układem równań (1.2.16) i (1.2.17). Przypomnijmy jego postać:

$$y = y^e + \beta_n \beta_{N^d} y^e - \beta_n v + y^e \beta_z \left(\kappa (\beta_w (1 - \kappa_p)(V - V^o) - \beta_p (1 - \kappa_w)(u - u^o)) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right), \quad (3.1.8)$$

$$y^d = (1 - \tau_w) y U + i_1 (y^e - y U - \delta - \xi - (r - \pi^e)) + i_2 (u - u^o) + \delta + g + \kappa (\beta_w (1 - \kappa_p)(V - V^o) - \beta_p (1 - \kappa_w)(u - u^o)) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right). \quad (3.1.9)$$

Rozwiązanie układu (3.1.8)–(3.1.9) można przedstawić w postaci:

$$y = \frac{AF - CE}{AD - BE}, \quad (3.1.10)$$

$$y^d = \frac{CD - BF}{AD - BE}, \quad (3.1.11)$$

gdzie:

$$A = 1 - \frac{\beta_{y^e}}{y^e},$$

$$B = i_1 U - \frac{i_2}{y^p} - \frac{\kappa \beta_w (1 - \kappa_p)}{l} + \frac{\kappa \beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p} - (1 - \tau_w) U,$$

$$C = i_1 (y^e - \delta - \xi - r + \pi^e) - i_2 u^o + n + g + \delta + \kappa (\beta_p (1 - \kappa_w) u^o - \beta_w (1 - \kappa_p) V^o) - \beta_{y^e},$$

$$D = 1 - \frac{y^e \beta_z \kappa \beta_w (1 - \kappa_p)}{l} + \frac{y^e \beta_z \kappa \beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p},$$

$$E = -\beta_z \beta_{y^e},$$

$$F = y^e \left(1 + \beta_n \beta_{N^d} + \beta_z (\kappa \beta_p (1 - \kappa_w) u^o - \kappa \beta_w (1 - \kappa_p) V^o + n - \beta_{y^e}) \right) - \beta_n v.$$

Po podstawieniu równości (3.1.10)–(3.1.11) do równań (3.1.1)–(3.1.7) otrzymujemy nieliniowy układ siedmiu równań różniczkowych, którego zmiennymi jest wyłącznie siedem zmiennych ($U, l, m, \pi^e, y^e, v, b$), których pochodne występują po lewej stronie tego układu.

Jak pokazaliśmy w rozdziale pierwszym, model (3.1.1)–(3.1.9) ma dokładnie jeden stan stacjonarny. Wartości zmiennych w stanie stacjonarnym są określone przez następujące równania:

$$\begin{aligned}
\bar{U} &= \frac{\bar{c}}{(1-\tau_w)\bar{u}y^p}, \\
\bar{l} &= \frac{\bar{u}y^p}{\bar{V}}, \\
\bar{m} &= \gamma \frac{h\bar{u}y^p}{\bar{r}}, \\
\bar{\pi}^e &= \bar{\pi} = \mu - n, \\
\bar{y}^e &= \gamma\bar{u}y^p, \\
\bar{v} &= \frac{1-\gamma}{n}\bar{u}y^p, \\
\bar{b} &= \frac{g - \tau_c \left(\gamma\bar{u}y^p - \frac{\bar{c}}{1-\tau_w} - \delta \right) - \tau_w \frac{\bar{c}}{1-\tau_w} - \mu\bar{m}}{n - \gamma\bar{u}y^p + \frac{\bar{c}}{1-\tau_w} + \delta + \xi + \tau_c \left(\gamma\bar{u}y^p - \frac{\bar{c}}{1-\tau_w} - \delta + \bar{\pi} \right)},
\end{aligned}$$

gdzie: $\bar{u} = u^o$, $\bar{V} = V^o$, $\gamma = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n}$, $\bar{c} = \gamma\bar{u}y^p - (n + \delta + g)$,

$$\bar{r} = \gamma\bar{u}y^p - \frac{\bar{c}}{1-\tau_w} - \delta + \mu - n - \xi.$$

Analizowany stan stacjonarny jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Definicja takiej stabilności w odniesieniu do stanu stacjonarnego modelu KMG (3.1.1)–(3.1.9) jest następująca.

Definicja 3.1. Stan stacjonarny $(\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$ modelu (3.1.1)–(3.1.9) jest lokalnie asymptotycznie stabilny, jeżeli istnieje takie jego otoczenie $U(\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$, że każda dopuszczalna trajektoria modelu (3.1.1)–(3.1.9), wychodząca ze stanu początkowego należącego do otoczenia $U(\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$ jest zbieżna do stanu stacjonarnego, czyli:

$$(U_t, l_t, m_t, \pi_t^e, y_t^e, v_t, b_t) \rightarrow (\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b}), \text{ gdy } t \rightarrow \infty.$$

W dowodzeniu stabilności przyjmujemy poniższe założenia.

Założenie 3.1.1. Wartości parametrów reakcji $\beta_z, \beta_n, \alpha, \beta_p, \beta_w, \beta_{y^e} > 0$ występujące w równaniach: (1.1.4), (1.1.5), (1.1.6), (1.1.9) oraz (1.1.20), są odpowiednio małe³².

³² Odpowiednio mała wartość parametru oznacza, że musi ona być dostatecznie mała w porównaniu z innymi parametrami, aby uzyskać ujemne części rzeczywiste wartości własnych, co gwarantuje

Zgodnie z założeniem 3.1.1 produkcja Y jest określana głównie na podstawie oczekiwań popytowych Y^e , których stopa wzrostu $\hat{Y}^e$ zależy z kolei przede wszystkim od stopy wzrostu płacy realnej $\hat{w} = \hat{w} - \hat{p}$. Ze względu na to, że różnica $1 - \alpha$ jest bliska jeden, zmiany oczekiwań inflacyjnych π^e są silnie stabilizowane przez stały czynnik $(\mu - n)$ odzwierciedlający inflację w stanie stacjonarnym. Ponadto odchylenia wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnych od jego normalnego poziomu $(u - u^o)$ w niewielkim stopniu wpływają na inflację $\hat{p}$, a odchylenia wskaźnika zatrudnienia od jego naturalnego poziomu $(V - V^o)$ słabo wpływają na dynamikę płacy nominalnej $\hat{w}$.

Założenie 3.1.2. Stopa wzrostu nominalnej podaży pieniądza μ nie przekracza stopy wzrostu wydajności pracy n powiększonej o stopę deprecjacji kapitału δ :

$$\mu < n + \delta.$$

Założenie 3.1.2 możemy interpretować jako wymóg, aby w stanie stacjonarnym inflacja nie była wyższa od wskaźnika deprecjacji kapitału, gdyż w stanie stacjonarnym zachodzi:

$$\bar{\pi} = \mu - n.$$

Uwaga 3.1. Założenie 3.1.2 staje się zbędne, jeżeli w definicji stanu stacjonarnego umieścimy wymóg, aby w stanie tym inflacja była zerowa. Wówczas założenie 3.1.2 redukuje się do nierówności:

$$-\delta < 0, \quad \text{czyli} \quad \delta > 0.$$

Założenie 3.1.3. Wartość parametru reakcji $i_1 > 0$ występującego w równaniu popytu inwestycyjnego – wzory (1.1.7) i (1.1.8) – jest odpowiednio duża.

Zgodnie z założeniem 3.1.3 popyt inwestycyjny jest bardzo wrażliwy na różnicę między oczekiwanym zyskiem z kapitału rzeczowego a oczekiwaną realną stopą procentową.

Założenie 3.1.4. Wartość parametru reakcji κ_p ($0 < \kappa_p < 1$) występującego w równaniu dynamiki cen (1.1.5) jest odpowiednio bliska 1.

Zgodnie z założeniem 3.1.4 stopa inflacji jest bardziej wrażliwa na różnicę między stopą wzrostu płac nominalnych $\hat{w}$ a stopą wzrostu wydajności pracy $n = \dot{x}/x$ niż na oczekiwaną stopę inflacji π^e .

je stabilność stanu stacjonarnego. Wartość „odpowiednio mała” jest uzależniona od innych wartości parametrów, a podanie konkretnego przedziału wymaga dokładnej analizy matematycznej. Analogiczna uwaga odnosi się do kolejnych założeń, w których mowa o wartościach innych parametrów odpowiednio dużych lub odpowiednio bliskich 1.

Założenie 3.1.5. Stopa wzrostu podaży pieniądza μ spełnia nierówność:

$$(1 - \tau_c) \bar{r} < \mu.$$

Założenie 3.1.6. Nominalna stopa procentowa w stanie stacjonarnym jest dodatnia:

$$\bar{r} = \frac{g + \mu - \tau_w(\mu - n - \delta - \xi + \gamma \bar{u} y^p)}{1 - \tau_w} > 0.$$

Warto zauważyć, że założenie 3.1.5 jest spełnione dla odpowiednio wysokiej stawki podatku od zysków z kapitału τ_c , natomiast założenie 3.1.6 jest spełnione dla odpowiednio niskiej stawki podatku od dochodów z pracy τ_w .

Założenia 3.1.1–3.1.6 pozwalają na przeprowadzenie dowodu następującego twierdzenia o stabilności modelu (3.1.1)–(3.1.7).

Twierdzenie 3.1. Jeżeli spełnione są założenia 3.1.1–3.1.6, to stan stacjonarny modelu (3.1.1)–(3.1.9) jest lokalnie asymptotycznie stabilny.

3.2. Dowód twierdzenia o stabilności modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza

3.2.1. Ogólna charakterystyka dowodu

Zgodnie z twierdzeniem o stabilności stanu stacjonarnego jednorodnego układu nieliniowych równań różniczkowych (Panek, 2003, s. 862, twierdzenie H.6), w celu udowodnienia lokalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego modelu (3.1.1)–(3.1.9) należy wykazać, że części rzeczywiste wszystkich wartości własnych (pierwiastków charakterystycznych) macierzy Jacobiego J_7 rozpatrywanego modelu w stanie stacjonarnym $\bar{x} = (\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$ są ujemne. Żeby to wykazać, macierz Jacobiego modelu w stanie stacjonarnym J_7 będziemy rozpatrywać jako ciągłą macierz funkcyjną parametrów: $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_w, \beta_p$.

Punktem wyjścia dowodu stabilności jest wyjściowy jacobian w stanie stacjonarnym J_7 z pierwiastkami λ_i . Żeby wykazać, że wszystkie pierwiastki λ_i mają ujemne części rzeczywiste, zastosujemy tzw. metodę kaskady macierzy stabilnych (*cascade of stable matrices approach*) wykorzystaną przez Carla Chiarellę, Reinera Frankego, Petera Flaschela i Williego Semmlera w dowodzie stabilności ich wersji modelu KMG (Chiarella i in., 2006). W wypadku stanu stacjonarnego modelu prezentowanego w niniejszej monografii metoda ta jest podzielona na cztery etapy. Na pierwszym etapie wyznaczamy macierz Jacobiego w stanie stacjonarnym J_7 .

Na drugim etapie wielomian charakterystyczny macierzy Jacobiego J_7 redukujemy do wielomianu drugiego stopnia W_2^{000} poprzez wyzerowanie parametrów reakcji. Zerowanie parametrów odbywa się w trzech krokach: najpierw zerujemy wektor parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$, następnie parametr β_w , a na końcu parametr β_p . Na kolejnym etapie wykazujemy, że otrzymany wielomian drugiego stopnia W_2^{000} ma pierwiastki o ujemnych częściach rzeczywistych. Na ostatnim czwartym etapie, na podstawie wyniku trzeciego etapu, poprzez stopniowe przywracanie dodatnich wartości wcześniej wyzerowanych parametrów, wykazujemy, że wyjściowa macierz Jacobiego J_7 ma pierwiastki o ujemnych częściach rzeczywistych.

Macierz Jacobiego modelu (3.1.1)–(3.1.9) w stanie stacjonarnym w ogólnym ujęciu ma postać:

$$J_7 = \begin{pmatrix} F_{1U} & F_{1l} & F_{1m} & F_{1\pi^e} & F_{1y^e} & F_{1v} & F_{1b} \\ F_{2U} & F_{2l} & F_{2m} & F_{2\pi^e} & F_{2y^e} & F_{2v} & F_{2b} \\ F_{3U} & F_{3l} & F_{3m} & F_{3\pi^e} & F_{3y^e} & F_{3v} & F_{3b} \\ F_{4U} & F_{4l} & F_{4m} & F_{4\pi^e} & F_{4y^e} & F_{4v} & F_{4b} \\ F_{5U} & F_{5l} & F_{5m} & F_{5\pi^e} & F_{5y^e} & F_{5v} & F_{5b} \\ F_{6U} & F_{6l} & F_{6m} & F_{6\pi^e} & F_{6y^e} & F_{6v} & F_{6b} \\ F_{7U} & F_{7l} & F_{7m} & F_{7\pi^e} & F_{7y^e} & F_{7v} & F_{7b} \end{pmatrix}. \quad (3.2.1)$$

Elementy macierzy J_7 to pochodne funkcji występujących po prawej stronie równań (3.1.1)–(3.1.7), obliczane w stanie stacjonarnym $\bar{x} = (\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$.

Wprowadźmy wektor zmiennych modelu:

$$X = (x_1 = U, x_2 = l, x_3 = m, x_4 = \pi^e, x_5 = y^e, x_6 = v, x_7 = b),$$

wówczas

$$F_i = F_i(X) \quad (i = 1, 2, \dots, 7),$$

a elementy macierzy J_7 w ogólnym zapisie mogą być przedstawione następująco:

$$F_{ij} = \left. \frac{\partial F_i(X)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7),$$

gdzie indeks $i = 1, 2, \dots, 7$ odpowiada kolejnym funkcjom (3.1.1)–(3.1.7).

Wartości własne (pierwiastki charakterystyczne) $\lambda_1, \dots, \lambda_7$ macierzy J_7 są pierwiastkami równania charakterystycznego tej macierzy postaci:

$$W_7(\lambda) = \det(J_7 - \lambda I) = 0.$$

3.2.2. Macierz Jacobiego modelu

W dowodzie stabilności stanu stacjonarnego będą nas interesować w pierwszej kolejności wartości pochodnych $F_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}}$ macierzy Jacobiego (3.2.1) z wyzerowanym wektorem trzech parametrów reakcji:

$$\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0.$$

Macierz takich pochodnych będziemy zapisywać następująco

$$J_7^0 = J_7(\beta = 0).$$

W analogiczny sposób będziemy oznaczać poszczególne elementy macierzy J_7^0 :

$$F_{ij}^0 = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}} (\beta = 0) \quad (i, j = 1, \dots, 7), \quad (3.2.2)$$

gdzie, podobnie jak wcześniej,

$$x_1 = U, x_2 = l, x_3 = m, x_4 = \pi^e, x_5 = y^e, x_6 = v, x_7 = b, x_7 = b.$$

Ze względu na skomplikowaną postać równań (3.1.1)–(3.1.7) z dodatkowymi równaniami (3.1.10)–(3.1.11) wyznaczenie wszystkich pochodnych F_{ij}^0 polegające zgodnie ze wzorem (3.2.2) na wcześniejszym wyznaczeniu pochodnych F_{ij} , a następnie wyzerowaniu w nich parametrów opisanych wektorem $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$, byłoby bardzo uciążliwe. Jednakże, biorąc pod uwagę złożoną postać funkcji $F_1(\cdot), \dots, F_7(\cdot)$ z układu (3.1.1)–(3.1.9), pochodne F_{ij}^0 możemy otrzymać w prostszy sposób, najpierw zerując parametry β_n, β_z, α w równaniach (3.1.1)–(3.1.9), a dopiero później obliczając pochodne tak zmodyfikowanych funkcji $F_1(\cdot), \dots, F_7(\cdot)$ względem zmiennych x_j .

Uzasadnieniem powyższego postępowania jest niżej przedstawiony lemat 3.1. W celu jego ścisłego sformułowania wprowadźmy zapis:

$$F_i(\cdot) = F_i(X, \beta) \quad (i = 1, \dots, 7),$$

podkreślający, że wartość każdej funkcji $F_i(\cdot)$ zależy od wektora zmiennych

$$X = (x_1 = U, x_2 = l, x_3 = m, x_4 = \pi^e, x_5 = y^e, x_6 = v, x_7 = b)$$

oraz od wektora parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$.

Symbolem $F_i(X, 0)$ oznaczmy funkcję $F_i(\cdot) = F_i(X, \beta)$ z wyzerowanym wektorem parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$ (także w równaniach (3.1.10)–(3.1.11), które zostały podstawiane do funkcji $F_i(\cdot) = F_i(X, \beta)$ w miejsce zmiennych y i y^d), a symbolem

$$\left. \frac{\partial F_i(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}$$

wartość pochodnej tej funkcji w stanie stacjonarnym $\bar{x} = (\bar{U}, \bar{I}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$.

$$\textbf{Lemat 3.1. } F_{ij}^0 = \left. \frac{\partial F_i(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta = 0) = \left. \frac{\partial F_i(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}, \quad (i, j = 1, \dots, 7).$$

Dowód. Funkcje $F_i(X, \beta)$ występujące po prawej stronie równań (3.1.1)–(3.1.7) w ogólnym zapisie możemy przedstawić w postaci:

$$F_i(X, \beta) = f_i^1(X, \beta) y + f_i^2(X, \beta) y^d + f_i^3(X, \beta), \quad (3.2.3)$$

gdzie

$$f_i^k(X, \beta) \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, 7$$

są funkcjami, które liniowo zależą od elementów wektora $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$,

$$y = y(X, \beta) \quad \text{i} \quad y^d = y^d(X, \beta)$$

są funkcjami (3.1.10)–(3.1.11).

Funkcje $f_i^k(X, \beta)$ można przedstawić jako sumę dwóch funkcji:

$$f_i^k(X, \beta) = f_i^{k1}(X, \beta) + f_i^{k2}(X),$$

gdzie $f_i^{k1}(X, \beta)$ zależy liniowo od elementów wektora $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$, a $f_i^{k2}(X)$ w ogóle nie zależy od β . Jeżeli $\beta = 0$, to $f_i^{k1}(X, \beta) = f_i^{k1}(X, 0) = 0$ i w konsekwencji:

$$\left. \frac{\partial f_i^k(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} = \left. \frac{\partial f_i^{k2}(X)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}. \quad (3.2.4)$$

Z tego, że $f_i^{k1}(X, \beta)$ zależy liniowo od elementów wektora $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$, wynika, że jeżeli najpierw obliczymy pochodną $\left. \frac{\partial f_i^k(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}$ dla $\beta > 0$, a następnie wyzerujemy wektor β , to otrzymamy pochodną równą pochodnej wyrażonej wzorem (3.2.4). Tożsamość tę przedstawia równanie

$$\left. \frac{\partial f_i^k(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta=0) = \left. \frac{\partial f_i^k(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} = \left. \frac{\partial f_i^{k2}(X)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} \quad (3.2.5)$$

Funkcje $y = y(X, \beta)$ i $y^d = y^d(X, \beta)$, wobec (3.1.8) i (3.1.9) możemy przedstawić w postaci:

$$y(X, \beta) = \frac{g_1(X, \beta) + g_2(X)}{h_1(X, \beta) + h_2(X)}, \quad (3.2.6)$$

$$y^d(X, \beta) = \frac{k_1(X, \beta) + k_2(X)}{h_1(X, \beta) + h_2(X)}, \quad (3.2.7)$$

gdzie $g_2(X)$, $k_2(X)$, $h_2(X)$ są funkcjami wektora X , których wartość nie zależy od wektora parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$. Funkcja $h_1(X, \beta)$ jest funkcją liniową względem parametrów β_n, β_z, α , natomiast funkcje $g_1(X, \beta)$ i $k_1(X, \beta)$ są wielomianami stopnia drugiego względem powyższych parametrów. W rezultacie funkcje $y = y(X, \beta)$ i $y^d = y^d(X, \beta)$ są funkcjami wymiernymi względem parametrów β_n, β_z, α . Funkcje (3.2.6)–(3.2.7) są określone dla $\beta = 0$ i przyjmują postać:

$$y(X, 0) = \frac{g_2(X)}{h_2(X)}, \quad y^d(X, 0) = \frac{k_2(X)}{h_2(X)}.$$

Określone są także ich pochodne cząstkowe w stanie stacjonarnym:

$$\left. \frac{\partial y(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} \quad \text{i} \quad \left. \frac{\partial y^d(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}. \quad (3.2.8)$$

Co więcej, z przedstawionych powyżej własności funkcji $g_1(X, \beta)$, $k_1(X, \beta)$ i $h_1(X, \beta)$

wynika, że jeżeli najpierw obliczymy pochodne $\left. \frac{\partial y(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}$ i $\left. \frac{\partial y^d(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}$ dla

$\beta > 0$, a następnie wyzerujemy wektor β , to otrzymamy pochodne określone we wzorze (3.2.8). Zatem:

$$\left. \frac{\partial y(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta=0) = \left. \frac{\partial y(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}, \quad (3.2.9)$$

$$\left. \frac{\partial y^d(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta=0) = \left. \frac{\partial y^d(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}. \quad (3.2.10)$$

Ze wzorów (3.2.3), (3.2.5) oraz (3.2.9)–(3.2.10) dostajemy ostatecznie, że

$$F_{ij}^0 = \left. \frac{\partial F_i(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta=0) = \left. \frac{\partial F_i(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}, \quad (i, j = 1, \dots, 7).$$

■

Korzystając z **lematu 3.1**, wyznaczmy poniżej pochodne cząstkowe

$$F_{ij}^0 = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta=0)$$

w stanie stacjonarnym przy wyzerowanym wektorze parametrów reakcji $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$, tworzące macierz Jacobiego J_7^0 .

Rozpocniemy od przypomnienia, że funkcje $F_i(\cdot) = F_i(X, \beta)$, $(i, j = 1, \dots, 7)$, gdzie

$$X = (x_1 = U, x_2 = l, x_3 = m, x_4 = \pi^e, x_5 = y^e, x_6 = v, x_7 = b),$$

występujące po prawej stronie równań (3.1.1)–(3.1.7), są funkcjami złożonymi, w których funkcjami wewnętrznymi są funkcje $y = y(X, \beta)$ i $y^d = y^d(X, \beta)$, opisane równaniami (3.1.10)–(3.1.11).

Do wyznaczenia pochodnych F_{ij}^0 konieczne jest zatem wcześniejsze wyznaczenie pochodnych funkcji $y = y(X, \beta)$ i $y^d = y^d(X, \beta)$ i wyzerowanie w nich wektora parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$. Tak otrzymane pochodne w układzie (3.2.9)–(3.2.10) oznaczyliśmy symbolami

$$\left. \frac{\partial y(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta=0) \quad \text{i} \quad \left. \frac{\partial y^d(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta=0).$$

W dalszej części dowodu stabilności dla wygody używać będziemy prostszego zapisu tych pochodnych, przyjmując, że

$$\left. \frac{\partial y(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta=0) = \left. \frac{\partial y^0}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} \quad \text{i} \quad \left. \frac{\partial y^d(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta=0) = \left. \frac{\partial y^{d0}}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}.$$

Zgodnie ze wzorami (3.2.9)–(3.2.10) pochodne te są tożsame z analogicznymi pochodnymi funkcji $y = y(X, \beta)$ i $y^d = y^d(X, \beta)$, w których wektor $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$ zostaje wyzerowany przed wyznaczeniem pochodnych. Zatem

$$\left. \frac{\partial y^0}{\partial x_i} \right|_{x=\bar{x}} = \left. \frac{\partial y(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}, \quad \left. \frac{\partial y^{d0}}{\partial x_i} \right|_{x=\bar{x}} = \left. \frac{\partial y^d(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}.$$

Pochodne te można wyznaczyć wprost ze wzorów (3.1.10)–(3.1.11), jednak ze względu na postać występujących w nich funkcji A, B, C, D, E jest to dość uciążliwe. Z tego względu pochodne te wyznaczymy, korzystając z układu równań otrzymanego z zależności (3.1.8) i (3.1.9) po wyzerowaniu wektora parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$, postaci:

$$y = y^e \quad (3.2.11)$$

$$y^d = \frac{(1 - \tau_w) y^e U + i_1 \left(y^e - y^e U - \delta - \xi - \left(\frac{h y^e}{m} - \pi^e \right) \right) + i_2 \left(\frac{y^e}{y^p} - \bar{u} \right) + \delta + g}{1 - \frac{\beta_{y^e}}{y^e}} + \frac{\kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y^e}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(\frac{y^e}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n - \beta_{y^e}}{1 - \frac{\beta_{y^e}}{y^e}}. \quad (3.2.12)$$

Pochodne funkcji y i y^d dla wyzerowanych parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$ w stanie stacjonarnym są zatem następujące:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial y^0}{\partial y^e} \right|_{x=\bar{x}} &= 1, \\ \left. \frac{\partial y^0}{\partial \pi^e} \right|_{x=\bar{x}} &= \left. \frac{\partial y^0}{\partial l} \right|_{x=\bar{x}} = \left. \frac{\partial y^0}{\partial m} \right|_{x=\bar{x}} = \left. \frac{\partial y^0}{\partial U} \right|_{x=\bar{x}} = \left. \frac{\partial y^0}{\partial v} \right|_{x=\bar{x}} = \left. \frac{\partial y^0}{\partial b} \right|_{x=\bar{x}} = 0, \\ \left. \frac{\partial y^{d0}}{\partial U} \right|_{x=\bar{x}} &= \frac{1 - \tau_w - i_1}{\bar{u} y^p - \beta_{y^e}} (\bar{u} y^p)^2, \\ \left. \frac{\partial y^{d0}}{\partial l} \right|_{x=\bar{x}} &= - \frac{\kappa \beta_w (1 - \kappa_p) \bar{V}^2}{\bar{u} y^p - \beta_{y^e}}, \\ \left. \frac{\partial y^{d0}}{\partial v} \right|_{x=\bar{x}} &= \left. \frac{\partial y^{d0}}{\partial b} \right|_{x=\bar{x}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial y^{d0}}{\partial m} \right|_{x=\bar{x}} &= \frac{i_1 \bar{r}^2}{(\bar{u}y^p - \beta_{y^e})h}, \\
\left. \frac{\partial y^{d0}}{\partial \pi^e} \right|_{x=\bar{x}} &= \frac{i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}}, \\
\left. \frac{\partial y^{d0}}{\partial y^e} \right|_{x=\bar{x}} &= \\
&= \frac{\bar{u}y^p \left((1-\tau_w)U + \left(1-U - \frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p} \right) i_1 + \frac{i_2}{y^p} + \kappa \left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right) \right) - \beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}}.
\end{aligned}$$

Po wyznaczeniu wyżej przedstawionych wartości pochodnych funkcji (3.2.11) i (3.2.12) dla $\beta = 0$ możemy przejść do wyznaczenia elementów macierzy J_7^0 . Jako przykład pokażemy sposób wyznaczenia dwóch pierwszych elementów tej macierzy, czyli pochodnych F_{1U}^0 i F_{1l}^0 . Zgodnie z lematem 3.1 w funkcjach, których pochodne obliczamy, wyzerowane są parametry opisane wektorem parametrów β . Pierwszym krokiem wyznaczenia F_{1U}^0 jest obliczenie pochodnej funkcji F_1 względem zmiennej U . Ze wzoru (3.1.1) wynika, że (zgodnie z lematem 3.1 w funkcji F_1 przed wyznaczeniem pochodnej zewnętrznej tej funkcji możemy wyzerować parametry opisane wektorem parametrów β):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial U} &= \frac{\partial}{\partial U} \left(U \kappa \left(\beta_w(1-\kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p(\kappa_w - 1) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) \right) = \\
&= \kappa \left(\beta_w(1-\kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p(\kappa_w - 1) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \\
&\quad + U \kappa \left(\left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{l} \right) + \left(\frac{\beta_p(\kappa_w - 1)}{y^p} \right) \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial U}.
\end{aligned}$$

Następnie do tak obliczonej pochodnej zewnętrznej podstawiamy wartości zmiennych U, l, m, π, y, v w stanie stacjonarnym i otrzymujemy:

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial U} \right|_{x=\bar{x}} = \kappa \frac{\bar{u}y^p - (n + \delta + g)}{(1-\tau_w)\bar{u}y^p} \left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} + \frac{\beta_p(\kappa_w - 1)}{y^p} \right) \left. \frac{\partial y}{\partial U} \right|_{x=\bar{x}}.$$

Ze względu na to, że $\frac{\partial y}{\partial U} \Big|_{x=\bar{x}} = 0$, dostajemy:

$$F_{1U} = \frac{\partial F_1}{\partial U} \Big|_{x=\bar{x}} = 0.$$

Przejdźmy do wyznaczenia pochodnej F_{1l}^0 . Podobnie jak przy obliczaniu F_{1U}^0 , pierwszym krokiem jest obliczenie pochodnej funkcji F_1 , tym razem względem zmiennej l :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial l} &= \frac{\partial}{\partial l} \left(U \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - V^o \right) + \beta_p (\kappa_w - 1) \left(\frac{y}{y^p} - u^o \right) \right) \right) = \\ &= U \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \frac{\frac{\partial y}{\partial l} l - y}{l^2} + \beta_p (\kappa_w - 1) \frac{\frac{\partial y}{\partial l}}{y^p} \right). \end{aligned}$$

Następnie do tak obliczonej pochodnej zewnętrznej podstawiamy wartości zmiennych U, l, m, π, y, v, b w stanie stacjonarnym oraz wyznaczoną wcześniej wartość pochodnej $\frac{\partial y}{\partial l}$ w stanie stacjonarnym dla wyzerowanego wektora parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$, równą:

$$\frac{\partial y^0}{\partial l} \Big|_{x=\bar{x}} = 0.$$

Po przekształceniach ostatecznie otrzymujemy:

$$F_{1l}^0 = -\bar{U} \kappa \beta_w (1 - \kappa_p) \frac{\bar{V}^2}{\bar{u} y^p}.$$

W podobny sposób wyznaczamy pozostałe elementy macierzy Jacobiego J_7^0 , obliczając pochodne funkcji (3.1.3)–(3.1.7) względem kolejnych zmiennych $U, l, m, \pi^e, y^e, v, b$ w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$. Pełny wykaz tych pochodnych prezentujemy poniżej. Dla uproszczenia zapisu stosujemy następujące podstawienia:

$$y_{y^e}^d = \frac{\bar{u} y^p \left((1 - \tau_w) \bar{U} + i_1 \bar{U} + \frac{i_2}{y^p} + \kappa \left(\frac{\beta_w (1 - \kappa_p)}{\bar{u} y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p} \right) - i_1 + \frac{i_1}{\bar{u} y^p} \bar{r} + \beta_{y^e} \right)}{\bar{u} y^p - \beta_{y^e}},$$

$$\bar{r} = \bar{u} y^p - \frac{\bar{u} y^p - (n + \delta + g)}{1 - \tau_w} - \delta + \mu - n,$$

$$\bar{U} = \frac{\bar{u}y^p - (n + \delta + g)}{(1 - \tau_w) \bar{u}y^p}.$$

Elementami pierwszego wiersza macierzy J_7^0 są wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ obliczonych dla funkcji:

$$F_1(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d).$$

Pochodne te są opisane przez następujące wzory:

$$F_{1U}^0 = 0,$$

$$F_{1l}^0 = -\bar{U}\kappa\beta_w(1 - \kappa_p)\frac{\bar{V}^2}{\bar{u}y^p},$$

$$F_{1m}^0 = 0,$$

$$F_{1\pi^e}^0 = 0,$$

$$F_{1y^e}^0 = \bar{U}\kappa\left(\frac{\beta_w(1 - \kappa_p)}{\bar{u}y^p}\bar{V} - \frac{\beta_p(1 - \kappa_w)}{y^p}\right),$$

$$F_{1v}^0 = F_{1b}^0 = 0.$$

Elementami drugiego wiersza macierzy J_7^0 są wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$ obliczonych dla funkcji:

$$F_2(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d).$$

Pochodne te są opisane przez następujące wzory:

$$F_{2U}^0 = -\frac{(\bar{u}y^p)^2}{\bar{V}} \cdot \frac{(1 - \tau_w)\beta_{y^e} - i_1\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{2l}^0 = \kappa\beta_w(1 - \kappa_p)\bar{V}\frac{\bar{u}y^p - 2\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{2m}^0 = -\frac{i_1}{\bar{V}h} \cdot \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n + \delta + g)}{1 - \tau_w} - \delta + \mu - n \right)^2,$$

$$F_{2\pi^e}^0 = \frac{i_1}{\bar{V}} \cdot \frac{-(\bar{u}y^p)^2}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{2y^e}^0 = -\frac{\bar{u}y^p}{\bar{V}} \left(\kappa \left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right) + \beta_{y^e} \frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u}y^p} + i_1 \left(1 - \bar{U} - \frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p} \right) + \frac{i_2}{y^p} \right),$$

$$F_{2v}^0 = F_{2b}^0 = 0.$$

Elementami trzeciego wiersza macierzy J_7^0 są wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ obliczonych dla funkcji:

$$F_3(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d).$$

Pochodne te są opisane przez następujące wzory:

$$F_{3U}^0 = -\frac{h}{\bar{r}} (\bar{u}y^p)^2 \frac{\beta_{y^e} - \tau_w \beta_{y^e} - i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{3l}^0 = \frac{h}{\bar{r}} \kappa \beta_w \bar{V}^2 \frac{\bar{u}y^p - 2\beta_{y^e} + \kappa_p \beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{3m}^0 = -i_1 \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n + \delta + g)}{1 - \tau_w} - \delta + \mu - n \right) \cdot \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{3\pi^e}^0 = -\frac{h\bar{u}y^p}{\bar{r}} \left(1 + \frac{i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \right),$$

$$F_{3y^e}^0 = -\frac{h\bar{u}y^p}{\bar{r}} \left(\frac{\kappa \beta_w}{\bar{u}y^p} \bar{V} + \frac{\kappa_w \kappa \beta_p}{y^p} + \beta_{y^e} \frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u}y^p} + i_1 \left(1 - \bar{U} - \frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p} \right) + \frac{i_2}{y^p} \right),$$

$$F_{3v}^0 = F_{3b}^0 = 0.$$

Elementami czwartego wiersza macierzy J_7^0 są wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ obliczonych dla funkcji:

$$F_4(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d).$$

Pochodne te są opisane przez następujące wzory:

$$F_{4U}^0 = 0, F_{4l}^0 = 0, F_{4m}^0 = 0, F_{4\pi^e}^0 = -\beta_{\pi^e}, F_{4y^e}^0 = 0, F_{4v}^0 = 0, F_{4b}^0 = 0.$$

Elementami piątego wiersza macierzy J_7^0 są wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ obliczonych dla funkcji:

$$F_5(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d).$$

Pochodne te są opisane przez następujące wzory:

$$F_{5U}^0 = (\bar{u}y^p)^2 i_1,$$

$$F_{5l}^0 = 0,$$

$$F_{5m}^0 = -\frac{i_1}{h} \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n + \delta + g)}{(1 - \tau_w)} - \delta + \mu - n \right)^2,$$

$$F_{5\pi^e}^0 = -i_1 \bar{u}y^p,$$

$$F_{5y^e}^0 = \beta_{y^e} + \kappa \beta_p (1 - \kappa_w) \bar{u} - \bar{u}y^p i_1 \left(1 - \bar{U} - \frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p} \right) - \bar{u}y^p \frac{i_2}{y^p},$$

$$F_{5\nu}^0 = 0,$$

$$F_{5b}^0 = 0.$$

Elementami szóstego wiersza macierzy J_7^0 są wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ obliczonych dla funkcji:

$$F_6(U, l, m, \pi^e, y^e, \nu, b, y, y^d).$$

Pochodne są opisane przez następujące wzory:

$$F_{6U}^0 = -\frac{1 - \tau_w - i_1}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} (\bar{u}y^p)^2,$$

$$F_{6l}^0 = -\frac{\kappa \beta_w (1 - \kappa_p) \bar{V}^2}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{6m}^0 = -\frac{i_1 \bar{r}^2}{(\bar{u}y^p - \beta_{y^e}) h},$$

$$F_{6\pi^e}^0 = -\frac{i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{6y^e}^0 = 1 - \frac{\bar{u}y^p \left((1 - \tau_w) \bar{U} + i_1 \bar{U} + \frac{i_2}{y^p} + \kappa \left(\frac{\beta_w (1 - \kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p} \right) - i_1 + \frac{\bar{r} i_1}{\bar{u}y^p} + \beta_{y^e} \right)}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{6\nu}^0 = -n,$$

$$F_{6b}^0 = 0.$$

Elementami siódmego wiersza macierzy J_7^0 są wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ obliczonych dla funkcji:

$$F_7(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d).$$

Pochodne są opisane przez następujące wzory:

$$F_{7U}^0 = -\tau_c \left(\frac{1 - \tau_w - i_1}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} (\bar{u}y^p)^2 - \bar{U}y \right) - \tau_w y + b - \bar{u}y^p \frac{(1 - \tau_w)\beta_{y^e} - i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{7l}^0 = \tau_c \frac{\kappa \beta_w (1 - \kappa_p) \bar{V}^2}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} - \bar{b} \kappa \beta_w \left((1 - \kappa_p) \frac{\bar{u}y^p - 2\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \cdot \frac{\bar{V}^2}{\bar{u}y^p} + \kappa_p \frac{\bar{u}y^p}{l^2} \right),$$

$$F_{7m}^0 = -\frac{hy^e}{m^2} \bar{b} - \tau_c \left(\frac{i_1 \bar{r}^2}{(\bar{u}y^p - \beta_{y^e})h} - \frac{hy^e}{m^2} b \right) + \\ - \tau_w U y - \frac{i_1}{h} \cdot \frac{\bar{b}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n + \delta + g)}{1 - \tau_w} - \delta + \mu - n \right)^2,$$

$$F_{7\pi^e}^0 = -\tau_c \frac{i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} - \bar{b} i_1 \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{7y^e}^0 = \frac{h}{m} \bar{b} - \tau_c \left(y_{y^e}^d - U + \frac{h}{m} b \right) - \tau_w U - b \left(-\hat{l}_{y^e} + \kappa \left(\frac{\beta_p}{y^p} + \frac{\kappa_p \beta_w}{l} \right) \right),$$

gdzie:

$$\hat{l}_{y^e} = - \left(\kappa \left(\frac{\beta_w (1 - \kappa_p)}{\bar{u}y^p} \cdot \bar{V} - \frac{\beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p} \right) + \beta_{y^e} \frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u}y^p} + i_1 \left(1 - \bar{U} - \frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p} \right) + \frac{i_2}{y^p} \right), \\ y_{y^e}^d = \frac{\bar{u}y^p \left((1 - \tau_w) \bar{U} + \left(1 - \bar{U} - \frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p} \right) i_1 + \frac{i_2}{y^p} + \kappa \left(\frac{\beta_w (1 - \kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p} \right) \right) - \beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}}.$$

$$F_{7v}^0 = 0,$$

$$F_{7b}^0 = (1 - \tau_c) \bar{r} - \mu.$$

Jak wynika z przedstawionych powyżej obliczeń, macierz J_7^0 z punktu widzenia jej elementów zerowych ma następującą strukturę:

$$J_7^0 = \begin{pmatrix} 0 & F_{1l}^0 & 0 & 0 & F_{1y^e}^0 & 0 & 0 \\ F_{2U}^0 & F_{2l}^0 & F_{2m}^0 & F_{2\pi^e}^0 & F_{2y^e}^0 & 0 & 0 \\ F_{3U}^0 & F_{3l}^0 & F_{3m}^0 & F_{3\pi^e}^0 & F_{3y^e}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{4\pi^e}^0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{5U}^0 & 0 & F_{5m}^0 & F_{5\pi^e}^0 & F_{5y^e}^0 & 0 & 0 \\ F_{6U}^0 & F_{6l}^0 & F_{6m}^0 & F_{6\pi^e}^0 & F_{6y^e}^0 & F_{6v}^0 & 0 \\ F_{7U}^0 & F_{7l}^0 & F_{7m}^0 & F_{7\pi^e}^0 & F_{7y^e}^0 & 0 & F_{7b}^0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.13)$$

3.2.3. Redukcja stopni wielomianów

W tym podrozdziale przeprowadzono redukcję wielomianu charakterystycznego macierzy J_7^0 do wielomianu drugiego stopnia W_2^{000} poprzez stopniowe wyzerowanie parametrów reakcji. Proces ten składa się z trzech kroków: najpierw zerujemy wektor parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$, następnie parametr β_w , a na końcu β_p . Następnie wykazujemy, że uzyskany wielomian drugiego stopnia W_2^{000} ma pierwiastki o ujemnych częściach rzeczywistych.

Lemat 3.2. Macierz J_7^0 ma trzy ujemne wartości własne $\lambda_1^0 = -\beta_{\pi^e} < 0$, $\lambda_2^0 = -n < 0$ oraz $\lambda_3^0 = (1 - \tau_c) \bar{r} - \mu < 0$.

Dowód. Po rozwinięciu wielomian charakterystyczny W_7^0 macierzy Jacobiego J_7^0 możemy przedstawić w postaci:

$$W_7^0(\lambda) = \det(J_7^0 - \lambda I) = (F_{7b}^0 - \lambda)(F_{4\pi^e}^0 - \lambda)(F_{6v}^0 - \lambda) \cdot W_4^0(\lambda), \quad (3.2.14)$$

gdzie

$$W_4^0(\lambda) = \det(J_4^0 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & F_{1l}^0 & 0 & F_{1y^e}^0 \\ F_{2U}^0 & F_{2l}^0 - \lambda & F_{2m}^0 & F_{2y^e}^0 \\ F_{3U}^0 & F_{3l}^0 & F_{3m}^0 - \lambda & F_{3y^e}^0 \\ F_{5U}^0 & 0 & F_{5m}^0 & F_{5y^e}^0 - \lambda \end{pmatrix} \quad (3.2.15)$$

jest wielomianem czwartego stopnia zmiennej λ .

Ze wzoru (3.2.14) oraz postaci pochodnych F_{7b}^0 , $F_{4\pi^e}^0$, F_{6v}^0 wynika natychmiast, że wielomian $W_7^0(\lambda)$ ma trzy ujemne pierwiastki rzeczywiste:

$$\lambda_1^0 = -\beta_{\pi^e} < 0, \quad \lambda_2^0 = -n < 0 \quad \text{oraz} \quad \lambda_3^0 = (1 - \tau_c) \bar{r} - \mu < 0 \quad (\text{założenie 3.1.5}). \quad \blacksquare$$

Pozostałe cztery pierwiastki $\lambda_4^0, \lambda_5^0, \lambda_6^0, \lambda_7^0$ wielomianu $W_7^0(\lambda)$ są równocześnie pierwiastkami wielomianu $W_4^0(\lambda)$.

Założmy dodatkowo, że oprócz wektora $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ także $\beta_w = 0$, i oznaczmy przez J_4^{00} macierz J_4^0 , w której $\beta_w = 0$.

Dodatkowo oznaczmy przez $\lambda_4^{00}, \lambda_5^{00}, \lambda_6^{00}, \lambda_7^{00}$ pierwiastki wielomianu:

$$W_4^{00}(\lambda) = \det(J_4^{00} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & F_{1y^e}^{00} \\ F_{2U}^{00} & -\lambda & F_{2m}^{00} & F_{2y^e}^{00} \\ F_{3U}^{00} & 0 & F_{3m}^{00} - \lambda & F_{3y^e}^{00} \\ F_{5U}^{00} & 0 & F_{5m}^{00} & F_{5y^e}^{00} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.2.16)$$

Z tego wzoru wynika, że jeden z pierwiastków wielomianu $W_4^{00}(\lambda)$, oznaczmy go przez λ_4^{00} , ma wartość równą zero:

$$\lambda_4^{00} = 0.$$

Równanie charakterystyczne macierzy J_4^{00} ma zatem postać:

$$W_4^{00}(\lambda) = \lambda W_3^{00}(\lambda) = \lambda \cdot \det(J_3^{00} - \lambda I) = 0,$$

gdzie

$$J_3^{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{1y^e}^{00} \\ F_{3U}^{00} & F_{3m}^{00} & F_{3y^e}^{00} \\ F_{5U}^{00} & F_{5m}^{00} & F_{5y^e}^{00} \end{pmatrix}. \quad (3.2.17)$$

Do założeń $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ i $\beta_w = 0$ dodajmy jeszcze, że $\beta_p = 0$, i oznaczmy przez J_4^{000} szczególną postać macierzy J_4^{00} odpowiadającą temu założeniu³³.

Rozpatrzmy wielomian:

$$W_3^{000}(\lambda) = \det(J_3^{000} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ F_{3U}^{000} & F_{3m}^{000} - \lambda & F_{3y^e}^{000} \\ F_{5U}^{000} & F_{5m}^{000} & F_{5y^e}^{000} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.2.18)$$

³³ Dowód przeprowadza się w trzech krokach, ponieważ przy redukowaniu wielomianu wyjściowego do wielomianu drugiego stopnia w jednym kroku ($\beta, \beta_w, \beta_p = 0$) otrzymamy dwie zerowe wartości własne. Skorzystanie wówczas z tego, że wyznacznik dowolnej macierzy jest równy iloczynowi jego wartości własnych, czyli pierwiastków charakterystycznych, nie pozwoli ocenić, czy pierwiastki te dla $\beta, \beta_w, \beta_p = 0$ mają ujemną część rzeczywistą.

Po rozwinięciu wielomian ten możemy przedstawić w postaci:

$$W_3^{000}(\lambda) = \lambda \cdot W_2^{000}(\lambda) = \lambda \cdot \det(J_2^{000} - \lambda I), \quad (3.2.19)$$

gdzie

$$J_2^{000} = \begin{pmatrix} F_{3m}^{000} & F_{3y^e}^{000} \\ F_{5m}^{000} & F_{5y^e}^{000} \end{pmatrix}. \quad (3.2.20)$$

Zw wzoru (3.2.19) wynika, że jeden z trzech pierwiastków λ_5^{000} , λ_6^{000} , λ_7^{000} wielomianu $W_3^{000}(\lambda)$ jest równy zero. Przyjmijmy, że

$$\lambda_5^{000} = 0.$$

Lemat 3.3. Przy powyższych założeniach oba pierwiastki λ_6^{000} i λ_7^{000} wielomianu $W_2^{000}(\lambda) = \det(J_2^{000} - \lambda I)$ albo są ujemne, albo mają ujemne części rzeczywiste.

Dowód. Wartości własne macierzy J_2^{000} są pierwiastkami równania charakterystycznego:

$$\det(\lambda J_2^{000} - \lambda I) = 0$$

równoważnego następującemu równaniu drugiego stopnia:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

o współczynnikach:

$$a_1 = -\text{tr } J_2^{000} = -(F_{3m}^{000} + F_{5y^e}^{000}),$$

$$a_2 = \det J_2^{000} = F_{3m}^{000} F_{5y^e}^{000} - F_{5m}^{000} F_{3y^e}^{000},$$

gdzie

$$F_{3m}^{000} = -i_1 \bar{r} \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{3y^e}^{000} = -\frac{h\bar{u}y^p}{\bar{r}} \left(\frac{\kappa\beta_w}{\bar{u}y^p} \bar{V} + \frac{\kappa_w\kappa\beta_p}{y^p} + \beta_{y^e} \frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u}y^p} + i_1 \left(1 - \bar{U} - \frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p} \right) + \frac{i_2}{y^p} \right),$$

$$F_{5y^e}^{000} = \beta_{y^e} - i_1(\delta - \mu + n) - \bar{u}i_2,$$

$$F_{5m}^{000} = -\frac{i_1}{h} \bar{r}^2.$$

Zgodnie z twierdzeniem Routha-Hurwitza, wszystkie wartości własne macierzy (3.2.17) mają ujemne części rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 > 0 \text{ i } a_2 > 0. \quad (3.2.21)$$

Żeby udowodnić lemat 3.3, wystarczy zatem pokazać, że spełnione są nierówności (3.2.22). Kluczowe znaczenie ma tutaj ustalenie znaków wszystkich pochodnych tworzących macierz J_2^{000} . Z założeń 3.1.2, 3.1.3 oraz 3.1.6 wynika, że $F_{3m}^{000} < 0$ oraz $F_{5y^e}^{000} < 0$. Stąd

$$a_1 = -\text{tr } J_2^{000} > 0. \quad (3.2.22)$$

W wypadku współczynnika $a_2 = \det J_2^{000} = F_{3m}^{000} F_{5y^e}^{000} - F_{5m}^{000} F_{3y^e}^{000}$, po podstawieniach i po uproszczeniu otrzymujemy:

$$a_2 = i_1 \bar{r} \beta_{y^e} \frac{-\beta_{y^e} - \bar{u}y^p + (n + \delta + g) + 2i_1(\delta - \mu + n) - \beta_{y^e} \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

skąd wynika, że jeżeli parametr $i_1 > 0$ jest odpowiednio duży (założenie 3.1.3), spełniona jest nierówność $\delta - \mu + n > 0$ (założenie 3.1.2), oraz jeżeli parametr $\beta_{y^e} > 0$ jest odpowiednio mały (założenie 3.1.1) to

$$a_2 = \det J_2^{000} > 0. \quad (3.2.23)$$

Warunki (3.2.22) i (3.2.23), zgodnie z twierdzeniem Routha-Hurwitza (Gandolfo, 2005, s. 221–222)) implikują, że obie wartości własne λ_6^{000} oraz λ_7^{000} macierzy J_2^{000} mają ujemne części rzeczywiste. ■

3.2.4. Przywracanie dodatnich wartości parametrów reakcji

W dalszej części dowodu twierdzenia 3.1, zaczynając od lematu 3.4, będziemy stopniowo przywracać dodatnie wartości chwilowo wyzerowanych parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$, β_w i β_p oraz ponownie rozpatrywać wielomiany charakterystyczne wyższych stopni $W_3^{00p}(\lambda)$, $W_4^{00}(\lambda)$, $W_7^{00}(\lambda)$ i $W_7(\lambda)$, ustalając własności ich pierwiastków charakterystycznych (wartości własnych odpowiednich macierzy). W tym celu będziemy korzystać z lematu 3.3, z ciągłości wszystkich elementów macierzy J_3^0 , J_4^0 , J_6^0 i J_6 względem parametrów β_n , β_z , α , β_w i β_p , a także z ciągłości wartości własnych macierzy względem elementów macierzy. Ciągłość elementów wymienionych powyżej macierzy względem parametrów β_n , β_z , α , β_w i β_p wynika z analizy wzorów (3.1.1)–(3.1.7). Ciągłość wartości własnych macierzy względem elementów macierzy jest z kolei znanym faktem matematycznym. Korzystając z lematu 3.2 oraz ze znajomości elementów macierzy J_3^0 , udowodnimy lemat 3.4.

Lemat 3.4. Dla odpowiednio małej wartości parametru $\beta_p > 0$ (i $\beta_w = 0$) wartości własne λ_5^{00} , λ_6^{00} i λ_7^{00} macierzy J_3^{00} są albo liczbami ujemnymi, albo liczbami zespolonymi o ujemnej części rzeczywistej.

Dowód. Porównajmy macierze:

$$J_3^{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{1y^e}^{00} \\ F_{3U}^{00} & F_{3m}^{00} & F_{3y^e}^{00} \\ F_{5U}^{00} & F_{5m}^{00} & F_{5y^e}^{00} \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad J_3^{000} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F_{3U}^{000} & F_{3m}^{000} & F_{3y^e}^{000} \\ F_{5U}^{000} & F_{5m}^{000} & F_{5y^e}^{000} \end{pmatrix}.$$

Macierz J_3^{000} otrzymujemy z macierzy J_3^{00} przez wyzerowanie parametru reakcji $\beta_p > 0$ we wszystkich elementach macierzy J_3^{00} . Ponadto $J_3^{00} \rightarrow J_3^{000}$, gdy $\beta_p \rightarrow 0$.

Zgodnie ze wzorami (3.2.18) oraz (3.2.19)

$$W_3^{000}(\lambda) = \det(J_3^{000} - \lambda I) = \lambda \cdot \det(J_2^{000} - \lambda I),$$

co implikuje, że dwie wartości własne macierzy J_2^{000} są również wartościami własnymi macierzy J_3^{000} .

Z lematu 3.3 wiemy, że pierwiastki λ_6^{000} i λ_7^{000} wielomianu $W_2^{000}(\lambda) = \det(J_2^{000} - \lambda I)$ (otrzymanego dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0, \beta_w = 0$ i $\beta_p = 0$) albo są ujemne, albo mają ujemne części rzeczywiste. W każdym z tych przypadków ich iloczyn jest liczbą rzeczywistą, dodatnią³⁴:

$$\lambda_6^{000} \cdot \lambda_7^{000} > 0.$$

Jak wynika z równania $W_3^{000}(\lambda) = \lambda W_2^{000}(\lambda)$ (zob. wzór (3.2.19)), pierwiastki λ_6^{000} , λ_7^{000} są także pierwiastkami wielomianu $W_3^{000}(\lambda)$, którego trzecim pierwiastkiem jest $\lambda_5^{000} = 0$. Ze względu na ciągłość macierzy J_3^{00} (zdefiniowanej dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0, \beta_w = 0$ i $\beta_p > 0$) względem parametru $\beta_p \geq 0$, dla odpowiednio małej wartości $\beta_p > 0$ pierwiastki λ_6^{000} i λ_7^{000} wielomianu (odpowiadające pierwiastkom λ_6^{000} i λ_7^{000}) również albo są ujemne, albo mają ujemne części rzeczywiste, skąd wynika, że także

$$\lambda_6^{00} \cdot \lambda_7^{00} > 0. \quad (3.2.24)$$

Ze względu na to, że pierwiastki zespolone występują zawsze parami jako liczby zespolone sprzężone, trzeci pierwiastek wielomianu $W_3^{00}(\lambda)$, oznaczony symbolem λ_5^{00} , jest liczbą rzeczywistą. Żeby udowodnić, że jest liczbą ujemną, skorzystamy

³⁴ Jeżeli pierwiastkami macierzy są liczby zespolone, to są to liczby zespolone sprzężone do siebie. Iloczyn liczby zespolonej i liczby do niej sprzężonej jest liczbą rzeczywistą nieujemną. Jeżeli liczba zespolona ma ujemną część rzeczywistą, to iloczyn tej liczby z liczbą sprzężoną do niej jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

z tego, że wyznacznik dowolnej macierzy jest równy iloczynowi jego wartości własnych, czyli pierwiastków charakterystycznych³⁵, a zatem

$$\det J_3^{00} = \lambda_5^{00} \cdot \lambda_6^{00} \cdot \lambda_7^{00}. \quad (3.2.25)$$

Wykażemy, że $\det J_3^{00} < 0$, co wobec nierówności $\lambda_6^{00} \cdot \lambda_7^{00} > 0$ implikuje, że $\lambda_5^{00} < 0$. Ze wzoru (3.2.15) wynika, że wyznacznik (3.2.25) możemy przedstawić w postaci:

$$\det J_3^{00} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{1y^e}^{00} \\ F_{3U}^{00} & F_{3m}^{00} & F_{3y^e}^{00} \\ F_{5U}^{00} & F_{5m}^{00} & F_{5y^e}^{00} \end{pmatrix} = F_{1y^e}^{00} \cdot \det \begin{pmatrix} F_{3U}^{00} & F_{3m}^{00} \\ F_{5U}^{00} & F_{5m}^{00} \end{pmatrix},$$

gdzie:

$$F_{1y^e}^{00} = \bar{U}\kappa \left(-\frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right),$$

$$F_{3m}^{00} = -i_1 \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n+\delta+g)}{(1-\tau_w)} - \delta + \mu - n \right) \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{3u}^{00} = -\frac{h}{\bar{r}} (\bar{u}y^p)^2 \frac{\beta_{y^e} - \tau_w \beta_{y^e} - i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{5m}^{00} = -\frac{i_1}{h} \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n+\delta+g)}{(1-\tau_w)} - \delta + \mu - n \right)^2,$$

$$F_{5U}^{00} = (\bar{u}y^p)^2 i_1.$$

Po podstawieniach i uproszczeniach dostajemy:

$$\det J_3^{00} = F_{1y^e}^{00} \cdot (F_{3U}^{00} F_{5m}^{00} - F_{3m}^{00} F_{5U}^{00}) = -i_1 \bar{r} \bar{U}\kappa \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} (\bar{u}y^p)^2 \frac{(1-\tau_w) \beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}}.$$

³⁵ Wielomian charakterystyczny z definicji jest równy:

$$W(\lambda) = \det(J - \lambda I) = (A_1 - \lambda) \cdot \dots \cdot (A_n - \lambda).$$

Po wymnożeniu wyznacznika $\det(J - \lambda I)$ otrzymamy wielomian stopnia n , którego wyraz wolny jest równy iloczynowi wartości własnych. Zatem $W(0) = \det(J) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.

Wobec nierówności $0 < \kappa_w < 1$ oraz $0 < \tau_w < 1$ z powyższego wzoru wynika, że dla odpowiednio małych wartości parametru $\beta_{y^e} > 0$ mamy:

$$\det J_3^{00} < 0.$$

Stąd, biorąc pod uwagę zależności (3.2.24) i (3.2.25), otrzymujemy, że dla odpowiednio małych wartości parametrów $\beta_p > 0$ i $\beta_{y^e} > 0$ trzecia wartość własna macierzy J_3^{00} jest liczbą ujemną ($\lambda_5^{00} < 0$), a pierwiastki λ_6^{00} i λ_7^{00} albo są ujemne, albo mają ujemne części rzeczywiste. ■

Poniżej, przywracając dodatnią wartość parametru β_w i korzystając z lematu 3.4, udowodnimy lemat 3.5 dotyczący wartości własnych macierzy J_4^0 :

$$J_4^0 = \begin{pmatrix} 0 & F_{1l}^0 & 0 & F_{1y^e}^0 \\ F_{2U}^0 & F_{2l}^0 & F_{2m}^0 & F_{2y^e}^0 \\ F_{3U}^0 & F_{3l}^0 & F_{3m}^0 & F_{3y^e}^0 \\ F_{5U}^0 & 0 & F_{5m}^0 & F_{5y^e}^0 \end{pmatrix} \quad (3.2.26)$$

występujących we wzorach (3.2.13)–(3.2.14), zdefiniowanych dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$, $\beta_p > 0$ oraz $\beta_w > 0$.

Lemat 3.5. Przy założeniach 3.1.1–3.1.6, dla odpowiednio małych wartości parametrów $\beta_p > 0$, $\beta_w > 0$ oraz $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ wszystkie wartości własne λ_4^0 , λ_5^0 , λ_6^0 i λ_7^0 macierzy J_4^0 są albo liczbami ujemnymi, albo liczbami zespolonymi o ujemnej części rzeczywistej.

Dowód. Dowód jest podobny do dowodu lematu 3.4. Zaczniemy go od rozwiązania macierzy:

$$J_4^{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_{1y^e}^{00} \\ F_{2U}^{00} & 0 & F_{2m}^{00} & F_{2y^e}^{00} \\ F_{3U}^{00} & 0 & F_{3m}^{00} & F_{3y^e}^{00} \\ F_{5U}^{00} & 0 & F_{5m}^{00} & F_{5y^e}^{00} \end{pmatrix},$$

która pojawia się we wzorze (3.2.15). Macierz J_4^{00} jest otrzymywana z J_4^0 poprzez zerowanie parametru β_w we wszystkich elementach macierzy J_4^0 . Poza tym mamy:

$$J_4^0 \rightarrow J_4^{00}, \text{ gdy } \beta_w \rightarrow 0. \quad (3.2.27)$$

Zgodnie ze wzorem (3.2.15):

$$W_4^{00}(\lambda) = \det(J_4^{00} - \lambda I) = \lambda \cdot \det(J_3^{00} - \lambda I) = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & F_{1y^e}^{00} \\ F_{3U}^{00} & F_{3m}^{00} - \lambda & F_{3y^e}^{00} \\ F_{5U}^{00} & F_{5m}^{00} & F_{5y^e}^{00} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.2.28)$$

Z równania tego wynika, że macierz J_4^{00} ma trzy wartości własne λ_5^{00} , λ_6^{00} i λ_7^{00} , które są identyczne z wartościami własnymi macierzy J_3^{00} . Jak pokazano w dowodzie lematu 3.4, dwie wartości własne λ_6^{00} i λ_7^{00} są liczbami ujemnymi lub liczbami zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Trzecia wartość własna λ_5^{00} macierzy J_4^{00} jest liczbą ujemną,

$$\lambda_5^{00} < 0. \quad (3.2.29)$$

Z nierówności tej wynika również, że czwarta wartość własna λ_4^{00} macierzy J_4^{00} jest równa zero,

$$\lambda_4^{00} = 0.$$

Stąd, biorąc pod uwagę zależność (3.2.27) i ciągłość wartości własnych macierzy J_4^0 względem jej elementów, dla odpowiednio małej wartości parametru $\beta_w > 0$ trzy wartości własne λ_5^0 , λ_6^0 i λ_7^0 macierzy J_4^0 (odpowiadające wartościom własnym λ_5^{00} , λ_6^{00} i λ_7^{00}) są również liczbami ujemnymi lub zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Pozostaje do zbadania czwarta wartość własna λ_4^0 macierzy J_4^0 odpowiadająca wartości własnej $\lambda_4^{00} = 0$ macierzy J_3^{00} .

W tym celu określimy znak wyznacznika:

$$\det J_4^0 = \lambda_4^0 \cdot \lambda_5^0 \cdot \lambda_6^0 \cdot \lambda_7^0,$$

wykorzystując nierówności:

$$\lambda_5^{00} < 0, \quad \lambda_6^{00} \cdot \lambda_7^{00} > 0 \quad (3.2.30)$$

(druga nierówność jest identyczna z nierównością (3.2.24)).

Ze wzoru (3.2.24) wynika, że

$$\det J_4^0 = -F_{1l}^0 \cdot A_1 - F_{1y^e}^0 \cdot A_2,$$

gdzie:

$$F_{1l}^0 = -\bar{U}\kappa\beta_w(1-\kappa_p)\frac{\bar{V}^2}{\bar{u}y^p} < 0, \quad F_{1y^e}^0 = \bar{U}\kappa\left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p}\bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p}\right),$$

$$A_1 = \det \begin{pmatrix} F_{2U}^0 & F_{2m}^0 & F_{2y^e}^0 \\ F_{3U}^0 & F_{3m}^0 & F_{3y^e}^0 \\ F_{5U}^0 & F_{5m}^0 & F_{5y^e}^0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \det \begin{pmatrix} F_{2U}^0 & F_{2l}^0 & F_{2m}^0 \\ F_{3U}^0 & F_{3l}^0 & F_{3m}^0 \\ F_{5U}^0 & 0 & F_{5m}^0 \end{pmatrix}.$$

Pierwsza składowa wyznacznika $\det J_4^0$ jest równa $(-F_{1l} \cdot A_1)$ i jest zbieżna do zera, gdy $0 < \kappa_p < 1$ jest zbieżne do 1 (założenie 3.1.4).

Wyznacznik macierzy A_2 po rozwinięciu i uproszczeniu przyjmuje postać:

$$A_2 = F_{5U}(-F_{3l}F_{2m}) + F_{5m}(F_{2U}F_{3l}).$$

Podstawiając do tego wzoru elementy wyznacznika A_2 , po uproszczeniu otrzymujemy:

$$A_2 = (\bar{u}y^p)^2 i_1 \bar{r} \kappa \beta_w \bar{V} \frac{\bar{u}y^p - 2\beta_{y^e} + \kappa_p \beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \cdot \frac{(1 - \tau_w) \beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}}.$$

Z tego wzoru wynika, że jeśli wartość parametru reakcji $\beta_{y^e} > 0$ jest odpowiednio mała (założenie 3.1.1), to:

$$A_2 > 0.$$

Jednocześnie, gdy $0 < \kappa_p < 1$ jest zbieżne do 1 (założenie 3.1.4), wówczas:

$$F_{1y^e}^0 = \bar{U} \kappa \left(\frac{\beta_w (1 - \kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p} \right) < 0.$$

W konsekwencji, jeśli wartość $0 < \kappa_p < 1$ jest odpowiednio bliska 1 (założenie 3.1.4), a wartości parametrów $\beta_p > 0$, $\beta_w > 0$ i $\beta_{y^e} > 0$ są odpowiednio małe (założenie 3.1.1), to

$$\det J_4^0 = \lambda_4^0 \cdot \lambda_5^0 \cdot \lambda_6^0 \cdot \lambda_7^0 > 0. \quad (3.2.31)$$

Ponieważ $\lambda_5^{00} < 0$, odpowiadająca jej wartość własna λ_5^0 macierzy J_4^0 dla odpowiednio małej wartości parametru $\beta_w > 0$ może być liczbą ujemną lub liczbą zespoloną z ujemną częścią rzeczywistą.

Jeżeli $\lambda_5^0 < 0$, to ze względu na ciągłość wartości własnych macierzy J_4^0 względem jej elementów, uwzględniając zależności (3.2.25) i (3.2.28), dla odpowiednio małej wartości parametru $\beta_w > 0$ otrzymujemy:

$$\lambda_5^0 \cdot \lambda_6^0 \cdot \lambda_7^0 < 0,$$

co w świetle nierówności (3.2.31) implikuje, że $\lambda_4^0 < 0$.

Rozważmy drugą możliwość, to znaczy, że wartość własna λ_5^0 jest liczbą zespoloną z ujemną częścią rzeczywistą. Ponieważ zespolone wartości własne (pierwiastki wielomianu) zawsze pojawiają się jako liczby sprzężone, czwarta wartość własna

λ_4^0 musi być wartością sprzężoną do λ_5^0 mającą taką samą ujemną część rzeczywistą jak λ_5^0 ³⁶.

Wcześniej wykazaliśmy, że λ_3^0 , λ_6^0 i λ_7^0 są liczbami ujemnymi lub zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Zatem powyższe dwie uwagi dotyczące wartości λ_4^0 uzupełniają dowód lematu 3.5. ■

Żeby dokończyć dowód twierdzenia 3.1 o lokalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego modelu (3.1.1)–(3.1.9), zauważmy, że zgodnie z lematami 3.1 i 3.5 wszystkie wartości własne λ_1^0 , λ_2^0 , λ_3^0 , λ_4^0 , λ_5^0 , λ_6^0 , λ_7^0 macierzy J_7^0 zdefiniowanej we wzorze (3.2.13) są liczbami ujemnymi lub zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi, ponieważ

$$W_7^0(\lambda) = \det(J_7^0 - \lambda I) = ((1 - \tau_c)\bar{r} - \mu - \lambda)(-n - \lambda)(-\beta_{\pi^e} - \lambda) \cdot W_4^0(\lambda).$$

Macierz J_7^0 otrzymuje się z macierzy Jacobiego J_7 poprzez wyzerowanie wektora parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_{\pi^e}, \alpha) > 0$. Ponadto mamy:

$$J_7^0 \rightarrow J_7, \text{ gdy } \beta \rightarrow 0.$$

W związku z tym oraz z ciągłości wartości własnych macierzy J_7 względem jej elementów możemy wnioskować, że wszystkie wartości własne λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 , λ_5 , λ_6 i λ_7 macierzy Jacobiego J_7 są liczbami ujemnymi lub zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Dowodzi to prawdziwości twierdzenia 3.1 o lokalnej, asymptotycznej stabilności modelu (3.1.1)–(3.1.9). ■

3.3. Twierdzenie o stabilności modelu KMG z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym

W tym podrozdziale zajmujemy się udowodnieniem twierdzenia o lokalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego modelu KMG z kredytem inwestycyjnym.

Przed przystąpieniem do sformułowania twierdzenia o stabilności i prezentacji jego dowodu przypomnijmy intensywną postać modelu KMG z kredytem inwestycyjnym z rozdziału drugiego (wzory (2.3.13)–(2.3.20)).

³⁶ Iloczyn sprzężonych liczb zespolonych $\lambda_4^0 = (a + ib)$ oraz $\lambda_5^0 = (a - ib)$ różnych od zera jest zawsze dodatni, ponieważ $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 > 0$. Stąd w świetle nierówności (3.2.29) mamy $\lambda_4^0 \cdot \lambda_5^0 > 0$ oraz $\lambda_6^0 \cdot \lambda_7^0 > 0$, co oznacza, że $\det J_4^0 = \lambda_4^0 \cdot \lambda_5^0 \cdot \lambda_6^0 \cdot \lambda_7^0 > 0$.

Model KMGT z kredytem inwestycyjnym w postaci intensywnej

$$\dot{U} = F_1(U, l, \pi^e, y^e, v, \lambda, r, b, y, y^d), \quad (3.3.1)$$

$$\dot{l} = F_2(U, l, \pi^e, y^e, v, \lambda, r, b, y, y^d), \quad (3.3.2)$$

$$\dot{\pi}^e = F_3(U, l, \pi^e, y^e, v, \lambda, r, b, y, y^d), \quad (3.3.3)$$

$$\dot{y}^e = F_4(U, l, \pi^e, y^e, v, \lambda, r, b, y, y^d), \quad (3.3.4)$$

$$\dot{v} = F_5(U, l, \pi^e, y^e, v, \lambda, r, b, y, y^d), \quad (3.3.5)$$

$$\dot{\lambda} = F_6(U, l, \pi^e, y^e, v, \lambda, r, b, y, y^d), \quad (3.3.6)$$

$$\dot{r} = F_7(U, l, \pi^e, y^e, v, \lambda, r, b, y, y^d), \quad (3.3.7)$$

$$\dot{b} = F_8(U, l, \pi^e, y^e, v, \lambda, r, b, y, y^d), \quad (3.3.8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} y^d = & (1 - \tau_w) y U + i_1 (y^e - y U - \delta - r \lambda - \rho^o) + i_2 (u - u^o) - i_3 \lambda + \delta + g + \\ & + \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V - V^o) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - u^o) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right), \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

$$\begin{aligned} y = & y^e + \beta_n \beta_{N^d} y^e - \beta_n v + \\ & + y^e \beta_z \left(\kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V - V^o) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - u^o) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Wartości zmiennych powyższego modelu w stanie stacjonarnym opisują następujące równania:

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1 - \tau_w) \bar{u} y^p},$$

$$\bar{l} = \frac{\bar{u} y^p}{\bar{V}},$$

$$\bar{y}^d = \frac{\beta_n + n}{(1 + \beta_n \beta_{N^d} + \beta_z n) n + \beta_n} \bar{u} y^p,$$

$$\bar{y}^e = \bar{y}^d,$$

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}^e &= \bar{\pi}, \\
\bar{v} &= \frac{\bar{u}y^p - \bar{y}^e}{n}, \\
\bar{\lambda} &= \frac{\lambda^o i_3(1-\tau_c) + ni_1 - i_1 \rho^o(1-\tau_c)}{i_3(1-\tau_c) + ni_1 + \bar{\pi}i_1}, \\
\bar{r} = r^o &= \frac{\bar{y}^d - \bar{U}\bar{y} - \delta - \bar{\rho}}{\bar{\lambda}}, \\
\bar{b} &= \frac{g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U}\bar{y}}{n + \bar{\pi} - \bar{r}}, \\
\bar{u} &= u^o, \\
\bar{V} &= V^o, \\
\bar{y} &= \bar{u}y^p, \\
\bar{\rho} &= \frac{(1-\bar{\lambda})n - \bar{\pi}\bar{\lambda}}{1-\tau_c}, \\
\bar{\rho}^e &= \bar{\rho}, \\
\bar{c} &= \bar{y}^d - n - \delta - g.
\end{aligned}$$

Analizowany stan stacjonarny jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Definicja takiej stabilności w odniesieniu do stanu stacjonarnego modelu KMG opisanego wzorami (3.3.1)–(3.3.10) jest następująca.

Definicja 3.2. Stan stacjonarny $(\bar{U}, \bar{l}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{r}, \bar{b})$ modelu (3.3.1)–(3.3.10) jest lokalnie asymptotycznie stabilny, jeżeli istnieje takie jego otoczenie $U(\bar{U}, \bar{l}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{r}, \bar{b})$, że każda dopuszczalna trajektoria modelu (3.3.1)–(3.3.10) wychodząca ze stanu początkowego należącego do otoczenia $U(\bar{U}, \bar{l}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{r}, \bar{b})$, jest zbieżna do stanu stacjonarnego.

W dowodzie stabilności przyjmujemy poniższe założenia.

Założenie 3.3.1. Wartości parametrów reakcji $\beta_z, \beta_n, \alpha, \beta_p, \beta_w, \beta_{i_p}, \beta_{i_u} > 0$ występujących w równaniach przedstawionych w tabeli 2.1 są odpowiednio małe.

Zgodnie z założeniem 3.3.1 produkcja Y jest określana głównie na podstawie oczekiwań popytowych Y^e . Zmiany oczekiwań inflacyjnych $\bar{\pi}^e$ są silnie stabilizowane przez stały czynnik π^o odzwierciedlający inflację w stanie stacjonarnym. Ponadto odchylenia wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnych od jego normalnego poziomu $(u - u^o)$ w niewielkim stopniu wpływają na inflację $\hat{p}$, a odchylenie

nia wskaźnika zatrudnienia od jego naturalnego poziomu ($V - V^0$) słabo wpływają na dynamikę płacy nominalnej $\hat{w}$. Wrażliwość nominalnej stopy procentowej r na odchylenia stopy wzrostu cen od stopy inflacji w stanie stacjonarnym ($\hat{p} - \bar{\pi}$) oraz na odchylenia wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnych od jego normalnego poziomu ($u - u^0$) jest niewielka.

Założenie 3.3.2. Wartości parametrów reakcji $i_2, i_3 > 0$, występujących w równaniu opisującym wielkość inwestycji (2.1.5) są odpowiednio duże.

Zgodnie z założeniem 3.2.3 przyjmuje się, że wielkość inwestycji silnie reaguje na odchylenia wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnych od jego normalnego poziomu ($u - u^0$) oraz na różnicę między granicznym poziomem zadłużenia w stosunku do nominalnej wartości kapitału rzeczowego a rzeczywistą wartością całkowitego zadłużenia sektora prywatnego w stosunku do nominalnej wartości kapitału rzeczowego ($\lambda^0 - \lambda$).

Założenie 3.3.3. Wartość parametru reakcji κ_p ($0 < \kappa_p < 1$) występującego w równaniu dynamiki płac nominalnych (zob. tabela 2.1) jest odpowiednio bliska 1.

Zgodnie z założeniem 3.3.4 stopa inflacji jest bardziej wrażliwa na różnicę między tempem wzrostu płac nominalnych $\hat{w}$ a tempem wzrostu wydajności pracy $n = \dot{x}/x$ niż na oczekiwaną stopę inflacji π^e .

Założenie 3.3.4. Wartość parametru reakcji β_{y^e} występującego w równaniu opisującym stopę wzrostu oczekiwanej sprzedaży (zob. tabela 2.1) jest odpowiednio duża (spełniona jest nierówność $\beta_{y^e} > \bar{u}y^p$).

Stopa wzrostu oczekiwanej sprzedaży $\hat{Y}^e$ silnie reaguje na względny błąd oczekiwań dotyczących wielkości realnego popytu $(Y^d - Y^e)/Y^e$.

Założenie 3.3.5. Spełniona jest nierówność

$$\bar{r} - \bar{\pi} < n.$$

Zgodnie z założeniem 3.3.5 nominalna stopa procentowa w stanie stacjonarnym ($\bar{r} - \bar{\pi}$) jest mniejsza od stopy wzrostu wydajności pracy n .

Twierdzenie 3.2. Jeżeli spełnione są założenia 3.3.1–3.3.5, to stan stacjonarny modelu (3.3.1)–(3.3.10) jest lokalnie asymptotycznie stabilny.

3.4. Dowód twierdzenia o stabilności modelu KMG z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym

3.4.1. Ogólna charakterystyka dowodu

W celu udowodnienia twierdzenia 3.2 wykażemy, że części rzeczywiste wszystkich wartości własnych (pierwiastków charakterystycznych) macierzy Jacobiego J_8 rozpatrywanego modelu w stanie stacjonarnym $\bar{x} = (\bar{U}, \bar{l}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{r}, \bar{b})$ są ujemne. Żeby to wykazać, macierz Jacobiego modelu w stanie stacjonarnym J_8 będziemy rozpatrywać jako ciągłą macierz funkcyjną parametrów: $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_i, \beta_p, \beta_w, \beta_p, \beta_{y^e}$.

Macierz Jacobiego modelu (3.3.1)–(3.3.10) w stanie stacjonarnym w ogólnym ujęciu ma postać:

$$J_8 = \begin{pmatrix} F_{1U} & F_{1l} & F_{2\pi^e} & F_{1y^e} & F_{1v} & F_{1\lambda} & F_{1r} & F_{1b} \\ F_{2U} & F_{2l} & F_{2\pi^e} & F_{2y^e} & F_{2v} & F_{2\lambda} & F_{2r} & F_{2b} \\ F_{3U} & F_{3l} & F_{3\pi^e} & F_{3y^e} & F_{3v} & F_{3\lambda} & F_{3r} & F_{3b} \\ F_{4U} & F_{4l} & F_{4\pi^e} & F_{4y^e} & F_{4v} & F_{4\lambda} & F_{4r} & F_{4b} \\ F_{5U} & F_{5l} & F_{5\pi^e} & F_{5y^e} & F_{5v} & F_{5\lambda} & F_{5r} & F_{5b} \\ F_{6U} & F_{6l} & F_{6\pi^e} & F_{6y^e} & F_{6v} & F_{6\lambda} & F_{6r} & F_{6b} \\ F_{7U} & F_{7l} & F_{7\pi^e} & F_{7y^e} & F_{7v} & F_{7\lambda} & F_{7r} & F_{7b} \\ F_{8U} & F_{8l} & F_{8\pi^e} & F_{8y^e} & F_{8v} & F_{8\lambda} & F_{8r} & F_{8b} \end{pmatrix}. \quad (3.4.1)$$

Elementy macierzy J_8 stanowią wartości pochodnych funkcji występujących po prawej stronie równań (3.3.1)–(3.3.8), obliczane w stanie stacjonarnym $\bar{x} = (\bar{U}, \bar{l}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{r}, \bar{b})$. W ogólnym zapisie przedstawiamy je następująco:

$$F_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8),$$

gdzie indeks $i = 1, 2, \dots, 8$ odpowiada kolejnym funkcjom modelu (3.3.1)–(3.3.8) oraz:

$$x_1 = U, \quad x_2 = l, \quad x_3 = \pi^e, \quad x_4 = y^e, \quad x_5 = v, \quad x_6 = \lambda, \quad x_7 = r, \quad x_8 = b.$$

Wartości własne (pierwiastki charakterystyczne) $\lambda_1, \dots, \lambda_8$ macierzy J_8 są pierwiastkami równania charakterystycznego tej macierzy postaci:

$$W_8(\lambda) = \det(J_8 - \lambda I) = 0.$$

Żeby wykazać, że wszystkie pierwiastki λ_i mają ujemne części rzeczywiste, podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.1 zastosujemy metodę kaskady macierzy stabilnych. Metoda ta jest podzielona na cztery etapy. Na pierwszym etapie wyznaczamy macierz Jacobiego w stanie stacjonarnym J_8 . Na drugim etapie redukujemy wielomian charakterystyczny macierzy Jacobiego J_8 do wielomianu drugiego stopnia W_2^{000} poprzez wyzerowanie parametrów reakcji. Zerowanie parametrów odbywa się w trzech krokach: najpierw zerujemy wektor parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_p, \beta_u)$, następnie parametr β_w , a na końcu parametr β_p . Na kolejnym etapie wykazujemy, że otrzymany wielomian drugiego stopnia W_2^{000} ma pierwiastki o ujemnych częściach rzeczywistych. Na ostatnim czwartym etapie wykazujemy, na podstawie wyniku trzeciego etapu, że wyjściowa macierz Jacobiego J_8 ma pierwiastki o ujemnych częściach rzeczywistych, poprzez stopniowe przywracanie dodatnich wartości wcześniej wyzerowanych parametrów.

3.4.2. Macierz Jacobiego modelu

W dowodzie stabilności stanu stacjonarnego interesować nas będą w pierwszej kolejności wartości pochodnych $F_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}}$ macierzy Jacobiego J_8 opisanej wzorem (3.4.1) z wyzerowanym wektorem pięciu parametrów reakcji:

$$\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_p, \beta_u) = 0.$$

Macierz takich pochodnych będziemy zapisywać jako:

$$J_8^0 = J_8(\beta = 0).$$

W analogiczny sposób będziemy oznaczać poszczególne elementy macierzy J_8^0 :

$$F_{ij}^0 = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}} (\beta = 0), \quad (i, j = 1, \dots, 8),$$

gdzie:

$$x_1 = U, \quad x_2 = I, \quad x_3 = \pi^e, \quad x_4 = y^e, \quad x_5 = v, \quad x_6 = \lambda, \quad x_7 = r, \quad x_8 = b.$$

Ze względu na specyficzną postać funkcji $F_1(\cdot), \dots, F_8(\cdot)$ z układu (3.2.1)–(3.2.8), korzystając z lematu 3.1, pochodne F_{ij}^0 otrzymujemy, zerując parametry $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_p, \beta_u$ w równaniach (3.3.1)–(3.3.8), a dopiero później obliczając pochodne tak zmodyfikowanych funkcji $F_1(\cdot), \dots, F_8(\cdot)$ względem zmiennych x_j .

Zatem macierz Jacobiego J_8 z wyzerowanymi parametrami $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_p, \beta_{i_u}$ ma postać:

$$J_9^0 = \begin{pmatrix} 0 & F_{1l}^0 & 0 & F_{1y^e}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{2U}^0 & F_{2l}^0 & F_{2\pi^e}^0 & F_{2y^e}^0 & 0 & F_{2\lambda}^0 & F_{2r}^0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{3\pi^e}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{4U}^0 & 0 & F_{4\pi^e}^0 & F_{4y^e}^0 & 0 & F_{4\lambda}^0 & F_{4r}^0 & 0 \\ F_{5U}^0 & F_{5l}^0 & F_{5\pi^e}^0 & F_{5y^e}^0 & F_{5\nu}^0 & F_{5\lambda}^0 & F_{5r}^0 & 0 \\ F_{6U}^0 & F_{6l}^0 & F_{6\pi^e}^0 & F_{6y^e}^0 & 0 & F_{6\lambda}^0 & F_{6r}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{7r}^0 & 0 \\ F_{8U}^0 & F_{8l}^0 & F_{8\pi^e}^0 & F_{8y^e}^0 & F_{8\nu}^0 & F_{8\lambda}^0 & F_{8r}^0 & F_{8b}^0 \end{pmatrix}.$$

Pochodne F_{ij}^0 wyznaczamy analogicznie do dowodu stabilności modelu KMG z rozdziału pierwszego. Większość pochodnych funkcji F_{ij}^0 ma postać podobną do pochodnych macierzy Jacobiego modelu (3.1.1)–(3.1.7), dlatego w tym dowodzie przedstawimy jedynie te wartości pochodnych F_{ij}^0 , które są niezbędne w dowodzie stabilności stanu stacjonarnego.

Uwaga 3.2. Z postaci funkcji $F_1, F_2, \dots, F_8$ występujących po prawej stronie układu (3.2.1)–(3.2.8) wynika, że są to funkcje różniczkowalne względem wszystkich zmiennych modelu, to znaczy zmiennych $U, l, \dots, b$, zarówno dla wartości parametrów reakcji $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_p, \beta_{i_u} > 0$, jak i dla $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_p, \beta_{i_u} = 0$.

Wielomian charakterystyczny $W_8^0(\lambda)$ macierzy Jacobiego J_8^0 ma postać:

$$W_8^0(\lambda) = \det(J_8^0 - \lambda I) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & F_{1l}^0 & 0 & F_{1y^e}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{2U}^0 & F_{2l}^0 - \lambda & F_{2\pi^e}^0 & F_{2y^e}^0 & 0 & F_{2\lambda}^0 & F_{2r}^0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{3\pi^e}^0 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{4U}^0 & 0 & F_{4\pi^e}^0 & F_{4y^e}^0 - \lambda & 0 & F_{4\lambda}^0 & F_{4r}^0 & 0 \\ F_{5U}^0 & F_{5l}^0 & F_{5\pi^e}^0 & F_{5y^e}^0 & F_{5\nu}^0 - \lambda & F_{5\lambda}^0 & F_{5r}^0 & 0 \\ F_{6U}^0 & F_{6l}^0 & F_{6\pi^e}^0 & F_{6y^e}^0 & 0 & F_{6\lambda}^0 - \lambda & F_{6r}^0 & 0 \\ 0 & F_{7l}^0 & F_{7\pi^e}^0 & F_{7y^e}^0 & 0 & 0 & F_{7r}^0 - \lambda & 0 \\ F_{8U}^0 & F_{8l}^0 & F_{8\pi^e}^0 & F_{8y^e}^0 & F_{8\nu}^0 & F_{8\lambda}^0 & F_{8r}^0 & F_{8b}^0 - \lambda \end{pmatrix},$$

gdzie:

$$F_{1l}^0 = -\bar{U}\kappa\beta_w(1-\kappa_p)\frac{\bar{V}^2}{\bar{u}y^p},$$

$$F_{1y^e}^0 = \bar{U}\kappa\left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p}\bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p}\right),$$

$$F_{2u}^0 = -\frac{(\bar{u}y^p)^2}{\bar{V}} \cdot \frac{(1-\tau_w)\beta_{y^e} - i_1\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{2l}^0 = \kappa\beta_w(1-\kappa_p)\bar{V}\frac{\bar{u}y^p - 2\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{2\pi^e}^0 = \frac{i_1}{\bar{V}} \cdot \frac{-(\bar{u}y^p)^2}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{2y^e}^0 = -\frac{\bar{u}y^p}{\bar{V}}\left(\kappa\left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p}\bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p}\right) + \beta_{y^e}\frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u}y^p} + i_1(1-\bar{U}) + \frac{i_2}{y^p}\right),$$

$$F_{2\lambda}^0 = (i_1\bar{r} + i_3)\frac{\bar{u}y^p}{\bar{V}} \cdot \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{2r}^0 = -\frac{\bar{u}y^p}{\bar{V}} \cdot \frac{\bar{u}y^p - 2\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}}i_1\lambda,$$

$$F_{3\pi^e} = \beta_{\pi^e}(\alpha - 1),$$

$$F_{4U}^0 = (\bar{u}y^p)^2 i_1,$$

$$F_{4\pi^e}^0 = -i_1\bar{u}y^p,$$

$$F_{4y^e}^0 = \beta_{y^e} + \kappa\beta_p(1-\kappa_w)\bar{u} - \bar{u}y^p i_1(1-\bar{U}) - \bar{u}y^p \frac{i_2}{y^p},$$

$$F_{4\lambda}^0 = \bar{u}y^p(i_1\bar{r} + i_3),$$

$$F_{4r}^0 = \bar{u}y^p i_1 \lambda,$$

$$F_{5U}^0 = -\frac{1-\tau_w-i_1}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}}(\bar{u}y^p)^2,$$

$$F_{sl}^0 = -\frac{\kappa\beta_w(1-\kappa_p)\bar{V}^2}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{5\pi^e}^0 = -\frac{i_1\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{5y^e}^0 = 1 - \frac{\bar{u}y^p \left((1-\tau_w)\bar{U} + i_1\bar{U} + \frac{i_2}{y^p} + \kappa \left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right) - i_1 + \frac{\bar{r}_1}{\bar{u}y^p} + \beta_{y^e} \right)}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{5\nu}^0 = -n,$$

$$F_{5\lambda}^0 = (i_1\bar{r} + i_3) \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} (1+\nu),$$

$$F_{5r}^0 = i_1\lambda \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} (1+\nu),$$

$$F_{6U}^0 = \left(- \left(\frac{i_1\bar{u}y^p - (1-\tau_w)\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \right) (1-\bar{\lambda}) + (1-\tau_c) \right) \bar{u}y^p,$$

$$F_{6l}^0 = \kappa\bar{V}^2\beta_w \left(\frac{-(1-\kappa_p)(1-\bar{\lambda})}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} + \frac{\kappa_p}{\bar{u}y^p} \lambda \right),$$

$$F_{6\pi^e}^0 = -i_1 \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} (1-\bar{\lambda}) - \bar{\lambda},$$

$$F_{6y^e}^0 = (1-\lambda)(-\hat{l}_{y^e}) - (1-\tau_c)(1-\bar{U}) - \left(\kappa \left(\kappa_p\beta_w \frac{1}{l} + \beta_p \frac{1}{y^p} \right) \right) \bar{\lambda},$$

$$\text{gdzie } \hat{l}_{y^e} = -i_1(1-\bar{U}) - i_2 \frac{1}{y^p} - \kappa \left(\beta_w(1-\kappa_p) \frac{1}{l} - \beta_p(1-\kappa_w) \frac{1}{y^p} \right) - \beta_{y^e} \frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u}y^p}$$

$$\text{oraz } \frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u}y^p} = \frac{(1-\tau_w)\bar{U} + (1-\bar{U})i_1 + \frac{i_2}{y^p} + \kappa \left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right) - 1}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{6\lambda}^0 = -n - (1-\bar{\lambda})(i_1\bar{r} + i_3) \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} + (1-\tau_c)\bar{r} - \bar{\pi},$$

$$F_{6r}^0 = -i_1 \lambda \frac{\bar{u} y^p}{\bar{u} y^p - \beta_{y^e}} (1 - \bar{\lambda}) + (1 - \tau_c) \bar{\lambda},$$

$$F_{7l}^0 = \kappa \kappa_p \beta_w \frac{\beta_{i_p} \bar{V}^2}{\bar{u} y^p},$$

$$F_{7\pi^e}^0 = \beta_{i_p},$$

$$F_{7y^e}^0 = \beta_{i_p} \kappa \left(\frac{\kappa_p \beta_w}{l} + \frac{\beta_p}{y^p} \right) + \beta_{i_u} \frac{1}{y^p},$$

$$F_{7r}^0 = -\beta_{i_i},$$

$$F_{8b}^0 = r - (n + \bar{\pi})$$

(w dowodzie twierdzenia 3.2 pozostałe wartości pochodnych funkcji F_8^0 nie są potrzebne).

3.4.3. Redukcja stopni wielomianów

W tym podrozdziale upraszczamy wielomian charakterystyczny macierzy J_8 aż do uzyskania wielomianu drugiego stopnia W_2^{000} . Proces ten polega na stopniowym wyzerowaniu parametrów reakcji: najpierw wektora $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u})$, następnie parametru β_w , a na końcu β_p . Następnie wykazujemy, że pierwiastki otrzymanego wielomianu W_2^{000} mają ujemne części rzeczywiste.

Lemat 3.6. Macierz J_8^0 ma cztery ujemne wartości własne $\lambda_1 = -\beta_{\pi^e}$, $\lambda_2 = -n$, $\lambda_3 = -\beta_{i_i}$ oraz $\lambda_4 = r - (n + \bar{\pi}) < 0$ (założenie 3.3.5).

Dowód. Po rozwinięciu wielomian W_8^0 możemy przedstawić w postaci:

$$W_8^0 = \det (J_7^0 - \lambda I) = (F_{3\pi^e}^0 - \lambda)(F_{5v}^0 - \lambda)(F_{7r}^0 - \lambda)(F_{8b}^0 - \lambda) \cdot W_4^0(\lambda), \quad (3.4.2)$$

gdzie

$$W_4^0(\lambda) = \det (J_4^0 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & F_{1l}^0 & F_{1y^e}^0 & 0 \\ F_{2U}^0 & F_{2l}^0 - \lambda & F_{2y^e}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4U}^0 & 0 & F_{4y^e}^0 - \lambda & F_{4\lambda}^0 \\ F_{6U}^0 & F_{6l}^0 & F_{6y^e}^0 & F_{6\lambda}^0 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Ze wzoru (3.4.2) wynika natychmiast, że wielomian $W_8^0(\lambda)$ ma cztery ujemne pierwiastki rzeczywiste:

$$\lambda_1^0 = -\beta_{\pi^e} < 0, \lambda_2^0 = -n < 0, \lambda_3^0 = -\beta_{i_i} < 0, \lambda_4^0 = r - (n - \bar{\pi}) < 0$$

dla $\beta_{\pi^e}, n, \beta_{i_i}, \bar{\pi} > 0, r - (n + \bar{\pi}) < 0$ (założenie 3.3.5). ■

Pozostałe cztery pierwiastki $\lambda_5^0, \lambda_6^0, \lambda_7^0, \lambda_8^0$ wielomianu $W_8^0(\lambda)$ są równocześnie pierwiastkami wielomianu $W_4^0(\lambda)$.

Założmy dodatkowo, że oprócz wektora $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u})$ także parametr reakcji β_w jest równo 0, i oznaczmy przez J_4^{00} macierz J_4^0 , w której $\beta_w = 0$. Ponadto jako $\lambda_5^0, \lambda_6^0, \lambda_7^0, \lambda_8^0$ oznaczmy pierwiastki wielomianu:

$$W_4^{00}(\lambda) = \det(J_4^{00} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & F_{1y^e}^{00} & 0 \\ F_{2U}^{00} & -\lambda & F_{2y^e}^{00} & F_{2\lambda}^{00} \\ F_{4U}^{00} & 0 & F_{4y^e}^{00} - \lambda & F_{4\lambda}^{00} \\ F_{6U}^{00} & 0 & F_{6y^e}^{00} & F_{6\lambda}^{00} - \lambda \end{pmatrix}, \quad (3.4.3)$$

gdzie:

$$F_{1y^e}^{00} = -\bar{U}\kappa \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p},$$

$$F_{2U}^{00} = -\frac{(\bar{u}y^p)^2}{\bar{V}} \cdot \frac{(1-\tau_w)\beta_{y^e} - i_1\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{2y^e}^{00} = -\frac{\bar{u}y^p}{\bar{V}} \left(-\kappa \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} + \beta_{y^e} \frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u}y^p} + i_1(1-\bar{U}) + \frac{i_2}{y^p} \right),$$

$$F_{2\lambda}^{00} = (i_1\bar{r} + i_3) \frac{\bar{u}y^p}{\bar{V}} \cdot \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}},$$

$$F_{4U}^{00} = (\bar{u}y^p)^2 i_1,$$

$$F_{4y^e}^{00} = \beta_{y^e} + \kappa\beta_p(1-\kappa_w)\bar{u} - \bar{u}y^p i_1(1-\bar{U}) - \bar{u}y^p \frac{i_2}{y^p},$$

$$F_{4\lambda}^{00} = \bar{u}y^p (i_1\bar{r} + i_3),$$

$$F_{6U}^{00} = \left(-\frac{i_1 \bar{u} y^p - (1 - \tau_w) \beta_{y^e}}{\bar{u} y^p - \beta_{y^e}} (1 - \bar{\lambda}) + (1 - \tau_c) \right) \bar{u} y^p,$$

$$F_{6y^e}^{00} = (1 - \lambda)(-\hat{l}_{y^e}) - (1 - \tau_c)(1 - \bar{U}) - \frac{\kappa \beta_p}{y^p} \lambda,$$

$$F_{6\lambda}^{00} = -n - (1 - \lambda)(i_1 \bar{r} + i_3) \frac{\bar{u} y^p}{\bar{u} y^p - \beta_{y^e}} + (1 - \tau_c) \bar{r} - \bar{\pi},$$

$$\text{gdzie } \hat{l}_{y^e} = -i_1(1 - \bar{U}) - \frac{i_2}{y^p} + \kappa \frac{\beta_p(1 - \kappa_w)}{y^p} - \beta_{y^e} \frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u} y^p} \text{ oraz}$$

$$\frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u} y^p} = \frac{(1 - \tau_w) \bar{U} + (1 - \bar{U}) i_1 + \frac{i_2}{y^p} + \kappa \left(-\frac{\beta_p(1 - \kappa_w)}{y^p} \right) - 1}{\bar{u} y^p - \beta_{y^e}}.$$

Ze wzoru (3.4.3) wynika, że jeden z pierwiastków wielomianu $W_4^{00}(\lambda)$, oznaczmy go przez λ_5^{00} , jest równy zero:

$$\lambda_5^{00} = 0.$$

Równanie charakterystyczne macierzy J_4^{00} ma zatem postać:

$$W_4^{00}(\lambda) = \lambda W_3^{00}(\lambda) = 0,$$

gdzie

$$W_3^{00}(\lambda) = \det(J_3^{00} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & F_{1y^e}^{00} & 0 \\ F_{4U}^{00} & F_{4y^e}^{00} - \lambda & F_{4\lambda}^{00} \\ F_{6U}^{00} & F_{6y^e}^{00} & F_{6\lambda}^{00} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Założmy dodatkowo, że oprócz $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_p, \beta_{i_y}) = 0$ i $\beta_w = 0$, również parametr β_p jest równy zero, i oznaczmy przez J_4^{000} szczególną postać macierzy J_4^{00} odpowiadającą temu założeniu.

Rozpatrzmy wielomian:

$$W^{000}(\lambda) = \det(J_3^{000} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ F_{4U}^{000} & F_{4y^e}^{000} - \lambda & F_{4\lambda}^{000} \\ F_{6U}^{000} & F_{6y^e}^{000} & F_{6\lambda}^{000} - \lambda \end{pmatrix}.$$

gdzie:

$$F_{4U}^{000} = (\bar{u}y^p)^2 i_1,$$

$$F_{4y^e}^{000} = \beta_{y^e} - \bar{u}y^p i_1 (1 - \bar{U}) - \bar{u}y^p \frac{i_2}{y^p},$$

$$F_{4\lambda}^{000} = \bar{u}y^p (i_1 r + i_3),$$

$$F_{6U}^{000} = \left(-\frac{i_1 \bar{u}y^p - (1 - \tau_w) \beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} (1 - \lambda) + (1 - \tau_c) \right) \bar{u}y^p,$$

$$F_{6y^e}^{000} = (1 - \lambda)(-\hat{l}_{y^e}) - (1 - \tau_c)(1 - \bar{U}),$$

$$F_{6\lambda}^{000} = -n - (1 - \lambda)(i_1 r + i_3) \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} + (1 - \tau_c) \bar{r} - \bar{\pi},$$

gdzie $\hat{l}_{y^e} = -i_1(1 - \bar{U}) - \frac{i_2}{y^p} - \beta_{y^e} \frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u}y^p}$ oraz

$$\frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u}y^p} = \frac{(1 - \tau_w) \bar{U} + (1 - \bar{U}) i_1 + \frac{i_2}{y^p} - 1}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}}.$$

Pierwiastki wielomianu $W^{000}(\lambda)$ to $\lambda_6^{000}, \lambda_7^{000}, \lambda_8^{000}$. Jeden z tych pierwiastków również ma wartość równą zero, niech to będzie na przykład

$$\lambda_6^{000} = 0.$$

Wielomian $W^{000}(\lambda)$ możemy zatem przedstawić w postaci:

$$W_3^{000}(\lambda) = \lambda W_2^{000}(\lambda) = 0,$$

gdzie

$$W_2^{000}(\lambda) = \det(J_2^{000} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} F_{7y^e}^{000} - \lambda & F_{7\lambda}^{000} \\ F_{8y^e}^{000} & F_{8\lambda}^{000} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.4.4)$$

Lemat 3.7. Oba pierwiastki λ_7^{000} i λ_8^{000} wielomianu $W_2^{000}(\lambda) = \det(J_2^{000} - \lambda I) = 0$ albo są ujemne, albo mają ujemne części rzeczywiste.

Dowód. Pierwiastki wielomianu $W_2^{000}(\lambda)$ są rozwiązaniem równania:

$$\det(\lambda J_2^{000} - \lambda I) = 0$$

równoważnego następującemu równaniu drugiego stopnia:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad (3.4.5)$$

gdzie:

$$a_1 = -\text{tr } J_2^{000},$$

$$a_2 = \det J_2^{000}.$$

Zgodnie z twierdzeniem Routha-Hurwitza wszystkie wartości własne macierzy (3.4.4) mają ujemne części rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące nierówności:

$$a_1 > 0 \quad \text{ i } \quad a_2 > 0.$$

Wykorzystując przedstawione powyżej wzory, możemy obliczyć współczynniki a_1 i a_2 wielomianu (3.4.5):

$$a_1 = -\text{tr } J_2^{000} = -(F_{4y^e}^{000} + F_{6\lambda}^{000}), \quad (3.4.6)$$

$$a_2 = \det J_2^{000} = F_{4y^e}^{000} F_{6\lambda}^{000} - F_{4\lambda}^{000} F_{6y^e}^{000}. \quad (3.4.7)$$

Po podstawieniu do wzoru (3.4.6) wartości $F_{4y^e}^{000}$ i $F_{6\lambda}^{000}$ otrzymujemy:

$$a_1 = - \left(\beta_{y^e} - \bar{u} y^p i_1 (1 - \bar{U}) - \bar{u} i_2 - n - (1 - \bar{\lambda})(i_1 \bar{r} + i_3) \frac{\bar{u} y^p}{\bar{u} y^p - \beta_{y^e}} + (1 - \tau_c) \bar{r} \right).$$

Dla odpowiednio dużej wartości parametru $i_2 > 0$, spełniającej nierówność:

$$\frac{\beta_{y^e} - \bar{u} y^p i_1 (1 - \bar{U}) - n - (1 - \bar{\lambda})(i_1 \bar{r} + i_3) \frac{\bar{u} y^p}{\bar{u} y^p - \beta_{y^e}} + (1 - \tau_c) \bar{r}}{\bar{u}} < i_2,$$

współczynnik a_1 ma wartość dodatnią ($a_1 > 0$).

Korzystając ze wzoru (3.4.7), możemy wyznaczyć wartość współczynnika a_2 :

$$a_2 = \left(\beta_{y^e} - \bar{u}y^p i_1 (1 - \bar{U}) - \bar{u}y^p \frac{i_2}{y^p} \right) \left(-n - (1 - \bar{\lambda})(i_1 r + i_3) \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} + (1 - \tau_c) \bar{r} \right) + \\ - \bar{u}y^p (i_1 r + i_3) \times \\ \times \left(\left(i_1 (1 - \bar{U}) + i_2 \frac{1}{y^p} + \beta_{y^e} \frac{(1 - \tau_w) \bar{U} + (1 - \bar{U}) i_1 + \frac{i_2}{y^p} - 1}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \right) (1 - \bar{\lambda}) - (1 - \tau_c)(1 - \bar{U}) \right).$$

Dla parametru $\beta_{y^e} > \bar{u}y^p$ oraz dla odpowiednio dużej wartości parametru i_2 współczynnik a_2 jest dodatni ($a_2 > 0$).

Z twierdzenia Routha-Hurwita wynika zatem, że dla odpowiednio dużej wartości parametru $i_2 > 0$ oraz $\beta_{y^e} > \bar{u}y^p$ wartości własne λ_7^{000} i λ_8^{000} mają ujemne części rzeczywiste. ■

3.4.4. Przywracanie dodatnich wartości parametrów reakcji

W dalszej części dowodu twierdzenia 3.2, zaczynając od lematu 3.7, będziemy stopniowo przywracać dodatnie wartości chwilowo wyzerowanych parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_i, \beta_u) = 0$, β_w i β_p i ponownie rozpatrywać wielomiany charakterystyczne wyższych stopni $W_3^{00}(\lambda)$, $W_4^0(\lambda)$, $W_8^0(\lambda)$, $W_8(\lambda)$, ustalając własności ich pierwiastków charakterystycznych (wartości własnych odpowiednich macierzy). W tym celu będziemy korzystać z lematu 3.7, z ciągłości wszystkich elementów macierzy J_3^{00} , J_4^0 , J_8^0 i J_8 względem parametrów $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_i, \beta_u, \beta_w$ i β_p , a także z ciągłości wartości własnych macierzy względem elementów macierzy. Ciągłość elementów wymienionych powyżej macierzy względem parametrów $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_i, \beta_u, \beta_w$ i β_p wynika z analizy wzorów (3.2.1)–(3.2.9). Ciągłość wartości własnych macierzy względem elementów macierzy jest z kolei znanym faktem matematycznym (Łojasiewicz, 1988, s. 70, twierdzenie o ciągłości pierwiastków wielomianu względem parametrów wielomianu). Korzystając z lematu 3.7 oraz ze znajomości elementów macierzy J_3^{00} , udowodnimy lemat 3.8.

Lemat 3.8. Dla odpowiednio małej wartości parametru $\beta_p > 0$ (i $\beta_w = 0$) pierwiastki λ_6^{00} , λ_7^{00} i λ_8^{00} wielomianu $W_3^{00}(\lambda) = \det(J_3^{00} - \lambda I)$ są albo liczbami ujemnymi, albo liczbami zespolonymi o ujemnej części rzeczywistej.

Dowód. Wielomian charakterystyczny macierzy J_3^{00} jest funkcją ciągłą zmiennej $\beta_p \geq 0$, a więc dla odpowiednio małych wartości parametru $\beta_p > 0$ macierz J_3^{00} ma

dwie wartości własne λ_7^{00} i λ_8^{00} ujemne lub będące liczbami zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych. Pokażemy teraz, że trzecia wartość własna macierzy J_3^{00} ma ujemną część rzeczywistą. Żeby to zrobić, skorzystamy z zależności:

$$\det J_3^{00} = \lambda_6^{00} \cdot \lambda_7^{00} \cdot \lambda_8^{00}. \quad (3.4.8)$$

Wartości własne λ_7^{00} i λ_8^{00} są ujemne lub są liczbami zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych, co oznacza, że ich iloczyn jest liczbą dodatnią. Jeśli wyznacznik (3.4.8) ma ujemną wartość, to trzecia wartość własna λ_6^{00} jest ujemna.

Wartość wyznacznika (3.4.8) możemy przedstawić w postaci:

$$\det J_3^{00} = -F_{1y^e}^{00} \begin{pmatrix} F_{4U}^{00} & F_{4\lambda}^{00} \\ F_{6U}^{00} & F_{6\lambda}^{00} \end{pmatrix} = \bar{U} \kappa \frac{\beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p} \cdot A,$$

gdzie $A = \det \begin{pmatrix} F_{4U}^{00} & F_{4\lambda}^{00} \\ F_{6U}^{00} & F_{6\lambda}^{00} \end{pmatrix}.$

Z tego wzoru wynika, że znak wyznacznika $\det J_3^{00}$ zależy od wyznacznika A , który jest równy:

$$A = (\bar{u}y^p)^2 \left[\left(-n - \frac{(1 - \tau_w)\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} (1 - \bar{\lambda}) \bar{r} \right) i_1 - \left((1 - \tau_c) - \frac{(1 - \tau_w)\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} (1 - \bar{\lambda}) \right) i_3 \right].$$

Dla wartości parametru $\beta_{y^e} > \bar{u}y^p$ wartość wyrażenia

$$(1 - \tau_c) - \frac{(1 - \tau_w)\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} (1 - \bar{\lambda})$$

jest dodatnia. Oznacza to, że dla odpowiednio dużej wartości parametru $i_3 > 0$ wyznacznik A jest ujemny, a więc wartość wyznacznika macierzy J_3^{00} jest ujemna, co zapisujemy:

$$\det J_3^{00} < 0.$$

W konsekwencji macierz J_3^{00} ma trzy wartości własne λ_6^{00} , λ_7^{00} , λ_8^{00} ujemne lub dwie zespolone o ujemnych częściach rzeczywistych i jedną ujemną. ■

Lemat 3.8 oraz znajomość macierzy J_4^0 umożliwiają z kolei dowód lematu 3.9.

Lemat 3.9. Przy założeniach 3.2.1-3.2.5 dla odpowiednio małych wartości parametrów $\beta_p > 0$ i $\beta_w > 0$ pierwiastki λ_5^0 , λ_6^0 , λ_7^0 i λ_8^0 wielomianu $W_4^0(\lambda) = \det(J_4^0 - \lambda I)$ są albo liczbami ujemnymi, albo liczbami zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych.

Dowód. Dowód tego lematu przebiega identycznie jak dowód lematu 3.5.

Wielomian charakterystyczny macierzy J_4^0 jest funkcją ciągłą zmiennej $\beta_w \geq 0$, a więc dla odpowiednio małej wartości parametru $\beta_w > 0$ macierz J_4^0 ma trzy wartości własne λ_6^0 , λ_7^0 i λ_8^0 będące liczbami ujemnymi lub liczbami zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych. Pokażemy teraz, że czwarta wartość własna macierzy J_4^0 jest liczbą ujemną lub liczbą zespoloną o ujemnej części rzeczywistej.

Żeby to zrobić, skorzystamy z zależności:

$$\det J_4^0 = \lambda_5^0 \cdot \lambda_6^0 \cdot \lambda_7^0 \cdot \lambda_8^0, \quad (3.4.9)$$

gdzie pierwiastki λ_6^0 , λ_7^0 i λ_8^0 są liczbami ujemnymi lub liczbami zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych, a więc ich iloczyn jest liczbą ujemną.

Jeżeli wyznacznik (3.4.9) jest dodatni, to wartość własna λ_5^0 jest liczbą ujemną lub liczbą zespoloną o ujemnej części rzeczywistej.

Gdy wartość parametru $0 < \kappa_p < 1$ jest odpowiednio bliska 1 (założenie 3.3.3), wówczas wartość wyznacznika (3.4.9) jest zbieżna do wartości:

$$\begin{aligned} \det J_4^0 &= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{1y^e}^0 & 0 \\ F_{2U}^0 & 0 & F_{2y^e}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4U}^0 & 0 & F_{4y^e}^0 & F_{4\lambda}^0 \\ F_{6U}^0 & \kappa \bar{V}^2 \beta_w \frac{\bar{\lambda}}{\bar{u}y^p} & F_{6y^e}^0 & F_{6\lambda}^0 \end{pmatrix} = \\ &= \kappa \bar{V}^2 \beta_w \frac{\bar{\lambda}}{\bar{u}y^p} (-1) \bar{U} \kappa \left(-\frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right) \det \begin{pmatrix} F_{2U}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4U}^0 & F_{4\lambda}^0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } \det \begin{pmatrix} F_{2U}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4U}^0 & F_{4\lambda}^0 \end{pmatrix} = F_{2U}^0 F_{4\lambda}^0 - F_{2\lambda}^0 F_{4U}^0 = -(i_1 \bar{r} + i_3) \cdot \frac{(\bar{u}y^p)^3}{\bar{V}} \cdot \frac{(1-\tau_w) \beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}}.$$

Wyrażenie $\frac{(1-\tau_w) \beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}}$ jest ujemne dla $\bar{u}y^p < \beta_{y^e}$. Oznacza to, że $\det \begin{pmatrix} F_{2U}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4U}^0 & F_{4\lambda}^0 \end{pmatrix} > 0$, a w konsekwencji wyznacznik:

$$\det J_4^0 = \kappa \bar{V}^2 \beta_w \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\bar{u}y^p} \cdot (-1) \bar{U} \kappa \left(-\frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right) \det \begin{pmatrix} F_{2U}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4U}^0 & F_{4\lambda}^0 \end{pmatrix}$$

ma wartość dodatnią. Wynika stąd, że wartość własna λ_5^0 macierzy J_4^0 ma ujemną część rzeczywistą. ■

Z lematu 3.9, z równania:

$$W_8^0(\lambda) = \det(J_8^0 - \lambda I) = (\lambda_1^0 - \lambda)(\lambda_2^0 - \lambda)(\lambda_3^0 - \lambda)(\lambda_4^0 - \lambda) \cdot W_4^0(\lambda) = 0$$

oraz z nierówności

$$\lambda_1^0 = -\beta_{\pi^c} < 0, \lambda_2^0 = -n < 0, \lambda_3^0 = -\beta_{i_i} < 0, \lambda_4^0 = r - (n - \bar{\pi}) < 0$$

wynika, że dla odpowiednio małych wartości parametrów $\beta_p > 0$ oraz $\beta_w > 0$ wszystkie pierwiastki wielomianu $W_8^0(\lambda) = \det(J_8^0 - \lambda I)$ (wartości własne macierzy J_8^0) są albo liczbami ujemnymi, albo liczbami zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych.

Jeżeli wartość własna λ_6^0 jest liczbą zespoloną z ujemną częścią rzeczywistą, to – korzystając z tego, że zespolone wartości własne zawsze pojawiają się jako liczby sprzężone – wartość własna λ_5^0 musi być sprzężona do wartości λ_6^0 mającej taką samą ujemną część rzeczywistą jak λ_6^0 .

Z ciągłości elementów macierzy J_8 względem parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_i, \beta_{i_i})$ oraz z ciągłości wartości własnych macierzy J_8 względem jej elementów, na podstawie lematu 3.9 wnioskujemy zatem, że dla odpowiednio małych wartości parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_i, \beta_{i_i}) > 0$ wielomian $W_8(\lambda) = \det(J_8 - \lambda I)$, podobnie jak wielomian $W_8^0(\lambda)$, ma wszystkie wartości własne ujemne lub będące liczbami zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych. Dowodzi to prawdziwości twierdzenia 3.2 o lokalnej, asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego modelu (3.3.1)–(3.3.10). ■

Podsumowanie

W rozdziale tym przedstawiono i udowodniono dwa twierdzenia o lokalnej asymptotycznej stabilności stanów stacjonarnych modeli KMG oraz KMGT z kre-
dytem inwestycyjnym omówionych w poprzednich rozdziałach. Przedstawione dowody stabilności są głównymi wynikami teoretycznymi niniejszej monografii.

Udowodnione twierdzenia dotyczą jedynie lokalnej asymptotycznej stabilności. Oznacza to, że zbieżność gospodarki do ścieżki równomiernego wzrostu jest gwarantowana tylko wtedy, gdy początkowa struktura gospodarki nie różni się zbyt-
nio od jej struktury opisanej w stanie stacjonarnym modelu w postaci intensywnej. Jak
bardzo początkowa struktura gospodarki może odbiegać od stanu stacjonarnego
bez utraty stabilności, można zweryfikować tylko poprzez symulacje komputerowe.
Również prędkość, z jaką gospodarka dąży w kierunku ścieżki równomiernego
wzrostu, można przetestować tylko poprzez eksperymenty komputerowe. Pomi-
mo tych ograniczeń matematyczne dowody stabilności modeli wzrostu, takich jak
przedstawione w monografii, są ważne dla rozwoju teorii wzrostu gospodarczego,

ponieważ ujawniają wewnętrzną zdolność analizowanej gospodarki do osiągnięcia struktury, która pozwala na zrównoważony wzrost. Brak stabilności jest poważnym mankamentem modelu, ponieważ jest równoważny z istnieniem samopogłębiającego się mechanizmu nierównowagi, co prowadzi do załamania gospodarczego.

Dowody stabilności zaprezentowane w tym rozdziale różnią się od dowodów twierdzeń modeli KMG analizowanych przez Chiarellę i in. Po pierwsze różnica wynika z matematycznej struktury modeli KMG opracowanych w niniejszej pracy. Struktura ta jest znacznie bardziej złożona niż ich wcześniejsze wersje analizowane przez Chiarellę i in. Po drugie dowody stabilności opracowanych modeli uzyskuje się przy innych zestawach założeń dotyczących parametrów modelu. W szczególności założenia, które zawierają stawki podatkowe od pracy i dochodów kapitałowych, są całkowicie nowe, stawki te nie są uwzględniane w modelach KMG zaprezentowanych przez Chiarellę i in. (2000, 2005) oraz Charpe'a i in. (2011), na podstawie których zostały opracowane nowe modele przedstawione w tej monografii. Po trzecie wprowadzone modyfikacje modelu powodują, że chociaż w dowodzie jest stosowana pochodząca od Chiarelli i in. metoda kaskady macierzy stabilnych, to jej realizacja jest zasadniczo inna, gdyż polega na chwilowym zerowaniu innych parametrów modelu i w innej kolejności. Ustalenie, które parametry zerować i w jakiej kolejności, było dużym wyzwaniem.

Kolejnym wnioskiem płynącym z analizy stabilności obu modeli jest wpływ siły reakcji oczekiwanego popytu na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie na stabilność tych modeli. W modelu KMG z kredytem inwestycyjnym, inaczej niż w KMG, stan stacjonarny jest lokalnie asymptotycznie stabilny, gdy oczekiwania dotyczące popytu silnie reagują na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie. (Nie można jednak wykluczyć, że w pierwszym modelu też tak będzie. Założenia, przy których zostały udowodnione twierdzenia o stabilności, są tylko wystarczającymi warunkami stabilności, co oznacza, że stabilność analizowanych modeli nie jest wykluczona także wówczas, gdy założenia te nie będą spełnione. Oznacza to, że prowadzenie polityki pieniężnej wg reguły Taylora pozwala uzyskiwać ścieżkę równomiernego wzrostu nawet przy silnym reagowaniu podmiotów gospodarczych na odchylenia rzeczywistego poziomu popytu od oczekiwanego.

W następnym rozdziale przedstawiono wyniki symulacji komputerowych dla danych o polskiej gospodarce z wykorzystaniem obu modeli analizowanych w monografii. Celem tych symulacji była weryfikacja przedstawionych w niniejszym rozdziale twierdzeń o stabilności oraz przetestowanie modelu na danych o polskiej gospodarce.



ROZDZIAŁ 4

Eksperymenty symulacyjne

Udowodnione w monografii twierdzenia o stabilności cechuje wysoki stopień ogólności, charakterystyczny dla tego rodzaju wyników matematycznych. Mówi się w nich m.in. o tym, że gospodarka zmierza do stanu stacjonarnego, jeżeli jej stan początkowy zawiera się w pewnym otoczeniu stanu stacjonarnego $U(\bar{U}, \bar{I}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$, a parametry reakcji modelu są odpowiednio małe. Twierdzenia te nie precyzują, co dokładnie znaczy „w pewnym otoczeniu” czy „odpowiednio małe parametry”. Nie precyzują również tego, jak długi musi być horyzont czasowy, aby gospodarka, startując z danego stanu początkowego, weszła na ścieżkę równomiernego wzrostu, jak długość tego horyzontu zależy od stanu początkowego i od parametrów modelu (w szczególności od instrumentów polityki makroekonomicznej) ani czy zbieżność do stanu stacjonarnego ma charakter monotoniczny, czy oscylacyjny. Wszystkie te pytania mają fundamentalne znaczenie z praktycznego, ekonomicznego punktu widzenia. Na gruncie teorii nie jest możliwe udzielenie na nie odpowiedzi. Taką wiedzę możemy uzyskać jedynie w wyniku symulacji komputerowych. Przeprowadzając obliczenia, możemy też się przekonać, jak zachowuje się gospodarka, jeżeli nie są spełnione założenia twierdzeń o stabilności. Możemy wreszcie wykorzystać model do badania gospodarki w krótszych horyzontach czasowych, w których nie wykazuje zbieżności do stanu stacjonarnego.

Jak widzimy, zakres możliwych eksperymentów symulacyjnych jest bardzo szeroki. Wprowadzone do modeli modyfikacje dodatkowo zakres ten poszerzają. Na przykład wprowadzenie do modelu różnych stawek podatkowych pozwala na badanie ich wpływu na generowane trajektorie zmiennych.

Symulacje prezentowane w tym rozdziale zostały przeprowadzone na podstawie modelu KMG przedstawionego w pierwszym rozdziale i modelu KMGT z rozdziału drugiego. W wypadku tego ostatniego zastosowano jednak jego wersję uproszczoną, bez sektora bankowego. Wiązało się to z pominięciem w modelu KMGT wykorzystanym w symulacjach kredytów inwestycyjnych sektora prywatnego oraz przyjęciem założenia, że podobnie jak w modelu KMG z rozdziału pierwszego, obligacje rządowe kupowane są przez sektor prywatny, a nie przez banki.

Wszystkie symulacje przeprowadzono z wykorzystaniem danych o polskiej gospodarce za rok 2018. Wymagało to z jednej strony żmudnej obróbki danych statystycznych, tak aby dostosować je do kategorii zmiennych modeli, a z drugiej strony takich modyfikacji modeli, aby zawrzeć w nich jak najwięcej danych o polskiej gospodarce. (Dobrym przykładem są tutaj dochody i konsumpcja ok. sześciu milionów polskich emerytów, którą należało uwzględnić w modelach użytych do symulacji, mimo że w modelach z teoretycznej części monografii nie ma takich zmiennych.) Modyfikacje modeli na potrzeby symulacji zostały przeprowadzone w taki sposób, że nie zmieniły ich struktury matematycznej – można je sprowadzić do postaci intensywnej, wyznaczyć stany stacjonarne i eksperymentalnie badać ich stabilność.

Najtrudniejszym zadaniem było dobranie wartości parametrów reakcji. Problem wynika z tego, że wyznaczenie ich wymaga użycia zaawansowanych metod ekonometrycznych. W niniejszej monografii do obliczenia parametrów reakcji zastosowano narzędzie programu komputerowego MS Excel – Solver³⁶, który na podstawie kilku założeń ustalił ich wartości. Ten sposób, choć nieidealny, jest wystarczający, by zbadać podstawowe własności modeli KMG i KMGT. Bardziej precyzyjne oszacowanie tych parametrów przy użyciu zaawansowanych metod ekonometrycznych jest przyczynkiem do dalszych badań nad omawianymi modelami. Oprócz parametrów reakcji w modelu są inne parametry, tj. stopy podatkowe, naturalna stopa bezrobocia, naturalny poziom wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej, stopa deprecjacji kapitału trwałego, pożądana stopa inflacji (cel inflacyjny) i naturalna stopa procentowa. Te parametry zostały oszacowane za pomocą danych statystycznych oraz równań modeli. W kolejnym kroku przygotowań do analizy ilościowej modeli należało, stosując metodę Eulera, przybliżyć model ciągle modelem dyskretnym. Głównym powodem stosowania tej procedury jest to, że udostępniane dane o gospodarce są danymi dyskretnymi. Tak przygotowany model dla przykładowego scenariusza bazowego za pomocą programów komputerowych można było zbadać w celu:

- sprawdzenia czasu dojścia do stanu stacjonarnego,
- analizy wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany wartości wybranych parametrów modelu,
- oszacowania przedziałów wartości wybranych parametrów modelu, dla których stan stacjonarny jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilny,
- porównania trajektorii modelu KMG i modelu KMGT dla tego samego scenariusza bazowego i jednakowych wartości parametrów,
- zbadania wpływu polityki fiskalnej i pieniężnej na trajektorie zmiennych modeli KMG i KMGT.

Zbadano także reakcje zmiennych modelu KMG z regułą Taylora na szoki zewnętrzne przy założeniu, że zmienne znajdują się na ścieżce równomiernego wzrostu. Ponadto sprawdzono wpływ polityki pieniężnej na czas powrotu do stanu stacjonarnego gospodarki wytrąconej ze ścieżki równomiernego wzrostu. Wprowadzone szoki odzwierciedlają kryzys gospodarczy związany z pandemią wirusa SARS-CoV-2 w latach 2020–2021.

³⁶ Solver jest dodatkiem do programu Microsoft Excel umożliwiającym przeprowadzanie analiz warunkowych. Za jego pomocą można znaleźć optymalną (maksymalną lub minimalną) wartość formuły w jednej komórce – zwanej komórką celu – podlegającej ograniczeniom dotyczącym wartości innych komórek z formułą znajdujących się w arkuszu. Dodatek Solver dostosowuje wartości w komórkach zmiennych decyzyjnych tak, aby spełnić limity obejmujące komórki ograniczeń i uzyskać pożądaną wartość w komórce celu (Microsoft, b.r.).

4.1. Kalibracja modelu na podstawie danych o polskiej gospodarce

W tym podrozdziale wyznaczymy wartości parametrów modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza na podstawie danych o polskiej gospodarce w 2018 roku.

4.1.1. Modyfikacja modelu KMG na potrzeby eksperymentów symulacyjnych

Przed kalibracją parametrów modelu przypomnijmy równania opisujące konsumpcję sektora prywatnego C , stopę zysku z kapitału ρ , deficyt budżetowy $\dot{B}$ (dług publiczny B) oraz podatki T :

$$C = (1 - \tau_w) \omega L^d, \quad (4.1.1)$$

$$\rho = \frac{Y^d - \omega L^d - \delta K}{K}, \quad (4.1.2)$$

$$\dot{B} = pG + rB - pT - \dot{M}, \quad (4.1.3)$$

$$T = T_w + T_c. \quad (4.1.4)$$

Równania (4.1.1)–(4.1.4), brane dosłownie, silnie upraszczają rzeczywistość. Z równania (4.1.1) możemy wnioskować, że konsumują tylko osoby pracujące otrzymujące wynagrodzenie z pracy. W rzeczywistości w gospodarce konsumują również osoby pracujące na własny rachunek, rolnicy oraz emeryci i renciści³⁷, a część dochodów konsumentów jest przeznaczana na oszczędności. Konsumentci płacą różne podatki, a pracujący płacą ponadto składki ZUS, co nie zostało ujęte w równaniu (4.1.1). Z równania (4.1.2) wynika, że koszt zatrudnienia pracownika jest równy jego wynagrodzeniu, co nie jest prawdą. Wiadomo przecież, że koszt zatrudnienia jednego pracownika dla pracodawcy jest wyższy od wynagrodzenia brutto pracownika o składkę ZUS, którą płaci pracodawca. Z tego samego równania wynika, że właściciele kapitału trwałego otrzymują cały dochód Y^d ze sprzedaży, co jest bardzo dużym uproszczeniem. W rzeczywistości popyt konsumpcyjny, który jest dużą częścią całkowitego popytu Y^d , zawiera także podatek pośredni, będący dochodem sektora publicznego. W równaniu (4.1.3) można zauważyć, że

³⁷ W Polsce w 2018 roku wg danych GUS liczba gospodarstw domowych pracowników najemnych stanowiła ponad 45% wszystkich gospodarstw domowych. Drugą co do wielkości grupą są emeryci i renciści. Jej liczebność w 2018 roku stanowiła ponad 37% ogółu gospodarstw. Natomiast gospodarstwa domowe rolników i osób pracujących na własny rachunek stanowią około 17% ogółu.

wśród wydatków budżetowych brakuje licznych transferów budżetowych oraz dotacji rządowych, które nie są zaliczane do konsumpcji publicznej G . Z drugiej strony finansowanie deficytu budżetowego może się odbywać za pomocą emisji obligacji i pieniędzy. Rząd nie może bezpośrednio finansować swoich wydatków emisją pieniądza. Źródłem finansowania wydatków rządu są dochody z emisji nowych obligacji, podatki i składki na ubezpieczenia społeczne. Równanie (4.1.4) przedstawia sumę dochodów sektora publicznego z podatków od dochodów z pracy i kapitału. W polskiej gospodarce największym źródłem dochodów sektora publicznego z podatków jest podatek pośredni³⁸, który nie jest uwzględniony w tym równaniu.

Uwzględnienie powyższych uwag w eksperymentach symulacyjnych wymaga wprowadzenia modyfikacji niektórych równań modelu. Celem tych modyfikacji jest uwzględnienie jak największej ilości informacji zawartych w danych o polskiej gospodarce bez zmiany matematycznej struktury modelu ani jego podstawowych własności, takich jak możliwość sprowadzenia modelu do postaci intensywnej, istnienie stanu stacjonarnego oraz lokalna asymptotyczna stabilność stanu stacjonarnego.

W pierwszej kolejności zajmiemy się równaniem (4.1.1). W symulacjach zakładamy, że realny dochód do dyspozycji gospodarstw domowych Y^D jest równy sumie realnych dochodów z pracy pracowników najemnych po opodatkowaniu $(1 - \tau) \omega L^d$ (dochody netto) i realnych transferów publicznych TR :

$$Y^D = (1 - \tau) \omega L^d + TR.$$

W symulacjach dla uproszczenia przyjmujemy założenie, że w każdym momencie realne transfery publiczne TR są wprost proporcjonalne do dochodów pracowników najemnych:

$$TR = \alpha_1 \omega L^d, \quad (4.1.5)$$

gdzie α_1 to parametr decyzyjny (współczynnik proporcjonalności), którego wartość jest stała w czasie. Korzystając ze wzoru (4.1.5), realny dochód do dyspozycji gospodarstw domowych Y^D po przekształceniach możemy zapisać jako:

$$Y^D = (1 - \tau + \alpha_1) \omega L^d.$$

Zgodnie z przedstawionymi w rozdziale drugim założeniami modelu KMG, sektor gospodarstw domowych nie oszczędza, a cały swój dochód do dyspozycji prze-

³⁸ Podatki pośrednie to podatki nakładane na wydatki na dobra i usługi. Podmioty płacące podatek pośredni nie są bezpośrednio zobowiązane do ich zapłaty. Podatki pośrednie przerzucane są na inny podmiot. Nie uwzględniają one zdolności płatniczej podatnika. Do podatków pośrednich w Polsce zaliczane są: podatek akcyzowy, podatek od towarów i usług (VAT), podatek od gier, cło. Podatek pośredni w 2018 roku stanowił około 70% wszystkich podatków.

znacza na konsumpcję ($Y^D = C$). Zatem realna konsumpcja sektora gospodarstw domowych w symulacjach komputerowych jest równa:

$$C = (1 - \tau + \alpha_1) \omega L^d,$$

gdzie $\tau = \tau_2 + \tau_w$ to suma stawki τ_2 składek na ubezpieczenie społeczne płaconych przez pracowników oraz stawki podatkowej τ_w od wynagrodzeń za pracę najemną.

W równaniu (4.1.2) od rzeczywistej sprzedaży Y^d odejmiemy podatek pośredni T_p . W kosztach firm oprócz wynagrodzenia brutto ωL^d i deprecjacji kapitału δK uwzględniamy składkę na ubezpieczenia społeczne. Składkę tę pracodawca płaci od wynagrodzenia brutto wypłacanego pracownikom, wynosi ona $\tau_1 \omega L^d$, gdzie τ_1 to stawka składki na ubezpieczenie społeczne płaconej przez pracodawcę. Uwzględniając powyższe modyfikacje w symulacjach komputerowych, stopa zysku z kapitału trwałego ma postać:

$$\rho = \frac{Y^d - T_p - (1 + \tau_1) \omega L^d - \delta K}{K}. \quad (4.1.6)$$

Przyjmujemy upraszczające założenie, że podatek pośredni T_p jest wprost proporcjonalny do całkowitej sprzedaży:

$$T_p = \tau_p Y^d, \quad \tau_p = \text{const}. \quad (4.1.7)$$

Po podstawieniu tego warunku do wzoru (4.1.6) otrzymujemy:

$$\rho = \frac{(1 - \tau_p) Y^d - (1 + \tau_1) \omega L^d - \delta K}{K}. \quad (4.1.8)$$

Deficyt sektora finansów publicznych, gdzie sektor ten obejmuje budżet państwa (budżet centralny plus budżet samorządów terytorialnych) oraz budżet Funduszu Ubezpieczeń Społecznych (FUS), jest równy zmianie liczby obligacji $\dot{B}$, która zależy od różnicy między wydatkami i przychodami tego sektora. Na wydatki składają się wydatki sektora rządowego na zakupy dóbr i usług $G = gK$, transfery budżetowe $TR = \alpha_1 \omega L^d$ (emerytury, renty i inne) oraz odsetki od obligacji rB/p (koszt obsługi długu publicznego)³⁹. Z kolei na przychody T składają się: podatek pośredni T_p , podatek od wynagrodzeń T_w , podatek od zysku z kapitału trwałego i obligacji T_c oraz składki na ubezpieczenia społeczne płacone przez pracodawców i pracowników T_{ZUS} . Dodatkowo w eksperymentach komputerowych, inaczej niż w przedstawionym w rozdziale pierwszym modelu KMG, nie ma możliwości finansowania

³⁹ Do wydatków rządowych zaliczamy także dotacje i dofinansowania rządowe, lecz w stosunku do pozostałych wydatków są one niewielkie, dlatego w symulacjach komputerowych będziemy je pomijać.

długu publicznego bezpośrednio przez kreowanie nowego pieniądza. W tym celu z równania (4.1.3) usunięto podaż pieniądza $\dot{M}$. Zatem równanie (4.1.3) zastępujemy w symulacjach równaniem:

$$\dot{B} = pG + pTR + rB - pT, \quad (4.1.9)$$

gdzie p to wskaźnik cen, a T to całkowity przychód sektora finansów publicznych.

Realne składki na ubezpieczenia społeczne T_{ZUS} płacone są przez pracodawców i pracowników. W symulacjach stawki te będą równe τ_1 i τ_2 , odpowiednio, i będą liczone od realnych wynagrodzeń brutto za pracę najemną ωL^d :

$$T_{ZUS} = \tau_1 \omega L^d + \tau_2 \omega L^d. \quad (4.1.10)$$

Podobnie jak składki T_{ZUS} w naszym modelu realne zaliczki na podatek dochodowy naliczane są od realnych wynagrodzeń brutto za pracę najemną i od zysku z kapitału trwałego i obligacji. Stawki podatkowe są równe τ_w i τ_c , odpowiednio od realnych wynagrodzeń brutto za pracę najemną oraz od zysku z kapitału trwałego i obligacji. Tym samym realna zaliczka na podatek dochodowy od wynagrodzenia za pracę jest równa:

$$T_w = \tau_w \omega L^d. \quad (4.1.11)$$

Zakładamy, że podatki dochodowe płacone przez podmiot zagraniczny z tytułu zysku z posiadanych obligacji są znikomo małe, więc je pomijamy. Stąd realna zaliczka na podatek dochodowy od zysku z kapitału trwałego i obligacji wynosi:

$$T_c = \tau_c \left(\rho K + \alpha_3 \frac{rB}{p} \right), \quad (4.1.12)$$

gdzie α_3 to stały w czasie stosunek obligacji krajowych w posiadaniu podmiotu krajowego do wszystkich obligacji.

Podsumowując, możemy stwierdzić, że całkowity przychód sektora finansów publicznych w symulacjach komputerowych jest równy sumie:

$$T = T_w + T_c + T_p + T_{ZUS}.$$

Po podstawieniu wyrażeń (4.1.10)–(4.1.12) do powyższego wzoru, po przekształceniach otrzymujemy:

$$T = \tau \omega L^d + \tau_c \left(\alpha_4 Y^d - (1 + \tau_1) \omega L^d - \delta K + \alpha_3 \frac{rB}{p} \right), \quad (4.1.13)$$

gdzie $\tau = \tau_w + \tau_1 + \tau_2$, $\alpha_4 = 1 - \tau_p + \frac{\tau_p}{\tau_c}$.

4.1.2. Zmodyfikowany model KMG w postaci intensywnej

Wykorzystując powyżej opisane modyfikacje równań modelu KMG, wersję modelu zastosowaną w symulacjach przedstawimy teraz w postaci intensywnej, która stanowi bazę porównań z wersjami przedstawionymi we wcześniejszych rozdziałach oraz pozwala analizować własności modelu takie jak stabilność stanu stacjonarnego. Dodatkowo postać intensywna ułatwia przeprowadzenie symulacji komputerowych modelu KMG. Żeby to zrobić, wykorzystamy zmienne: udział płac w PKB $U = \omega L^d/Y$, pracochłonność pełnego zatrudnienia (stosunek efektywnej pracy do kapitału) $l = xL/K$, realną podaż pieniądza na jednostkę kapitału trwałego $m = M/pK$, oczekiwany popyt na jednostkę kapitału trwałego $y^e = Y^e/pK$, wielkość zapasów na jednostkę kapitału $v = N/K$, stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału trwałego $b = B/pK$.

Postać intensywna modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza, omawiana w rozdziale pierwszym, w symulacjach komputerowych jest następująca:

$$\hat{U} = \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - \bar{u}) \right), \quad (4.1.14)$$

$$\hat{l} = n - \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) - i_1 \left(\rho^e - \xi - \left(\frac{hy^e}{m} - \pi^e \right) \right) - i_2 (u - \bar{u}), \quad (4.1.15)$$

$$\hat{m} = \mu - n - \hat{p} + \hat{l}, \quad (4.1.16)$$

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} \left(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \bar{\pi} - \pi^e \right), \quad (4.1.17)$$

$$\dot{y}^e = y^e \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) - n + \hat{l} \right), \quad (4.1.18)$$

$$\dot{v} = y - y^d - v (n - \hat{l}), \quad (4.1.19)$$

$$\dot{b} = \left(g + rb - \tau_c \left(\alpha_4 y^d - (1 + \tau_1) Uy - \delta + \alpha_3 rb \right) - (\tau - \alpha_1) Uy \right) - b (n - \hat{l} + \hat{p}), \quad (4.1.20)$$

gdzie:

$$\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p} = \text{const},$$

$$\alpha_4 = 1 - \tau_p + \frac{\tau_p}{\tau_c} = \text{const},$$

$$\hat{p} = \kappa \left(\kappa_p \beta_w (V - \bar{V}) + \beta_p (u - \bar{u}) \right) + \pi^e,$$

$$V = \frac{y}{l},$$

$$u = \frac{y}{y^p},$$

$$\rho^e = (1 - \tau_p)y^e - (1 + \tau_1)Uy - \delta,$$

oraz

$$y^d = (1 + \alpha_1 - \tau)yU + i_1 \left(\rho^e - \xi - \left(\frac{hy^e}{m} - \pi^e \right) \right) + i_2(u - \bar{u}) + \delta + g + \\ + \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right), \quad (4.1.21)$$

$$y = y^e + \beta_n \beta_{N^d} y^e - \beta_n v + \\ + y^e \beta_z \left(\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right). \quad (4.1.22)$$

Wyprowadzanie powyższych równań modelu KMG w postaci intensywnej (4.1.14)–(4.1.22) odbywa się w analogiczny sposób jak w modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza (zob. rozdział 1). Różnice wynikają ze zmiany równań (4.1.1)–(4.1.4), które mają odzwierciedlenie w równaniu (4.1.20) oraz w równaniach (4.1.21) i (4.1.22).

Wartości zmiennych modelu (4.1.14)–(4.1.22) dla gospodarki w stanie stacjonarnym

Stan stacjonarny utożsamiamy z takim stanem gospodarki, w którym wszystkie zmienne modelu (4.1.14)–(4.1.22) są stałe w czasie. Oznacza to, że równowadze wygasa dynamika tych zmiennych: $\dot{U} = 0, \dot{l} = 0, \dots, \dot{b} = 0$. Żeby wyprowadzić wzory na wartości zmiennych w stanie stacjonarnym, wystarczy rozwiązać układ równań (4.1.14)–(4.1.22), przyrównując ich prawą stronę do zera.

Postępując analogicznie do rozdziału pierwszego, tzn. rozwiązując układ równań (4.1.14)–(4.1.22), w którym lewa strona jest równa zero, a niewiadomymi są zmienne: U, l, m, π^e, y^e, v oraz b , można udowodnić, że istnieje dokładnie jeden stan stacjonarny modelu (4.1.14)–(4.1.22) opisany wzorami:

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1 + \alpha_1 - \tau)\bar{y}}, \quad (4.1.23)$$

$$\bar{l} = \frac{\bar{y}}{\bar{V}}, \quad (4.1.24)$$

$$\bar{m} = h \frac{\bar{y}^d}{\bar{r}}, \quad (4.1.25)$$

$$\bar{\pi}^e = \hat{p} = \bar{\pi} = \mu - n, \quad (4.1.26)$$

$$\bar{y}^d = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} \bar{y}, \quad (\bar{y}^e = \bar{y}^d), \quad (4.1.27)$$

$$\bar{v} = \frac{\bar{y} - \bar{y}^d}{n}, \quad (4.1.28)$$

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c (\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{y} - \delta) - (\tau - \alpha_1) \bar{U} \bar{y}}{\alpha_3 \tau_c \bar{r} - \bar{\rho} + \xi + n},$$

$$\alpha_4 = 1 - \tau_p + \frac{\tau_p}{\tau_c} = \text{const}, \quad (4.1.29)$$

$$\bar{y} = \bar{u} y^p, \quad y^p = \text{const}, \quad (4.1.30)$$

$$\bar{\rho} = (1 - \tau_p) \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{y} - \delta, \quad (\bar{\rho} = \bar{\rho}^e), \quad (4.1.31)$$

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{\pi} - \xi, \quad (4.1.32)$$

$$\bar{c} = \bar{y}^d - (n + \delta + g). \quad (4.1.33)$$

Twierdzenie 4.1. Jeśli spełnione są założenia 3.1.1–3.1.6, to stan stacjonarny (4.1.23)–(4.1.33) modelu (4.1.14)–(4.1.22) jest lokalnie asymptotycznie stabilny.

Dowód. Wszystkie zastosowane modyfikacje równań modelu KMG z rozdziału pierwszego polegają jedynie na pomnożeniu kilku zmiennych przez dodatnie stałe. Łatwo pokazać, że te modyfikacje nie mają większego wpływu na strukturę dowodu stabilności stanu stacjonarnego modelu KMG. Oznacza to, że dowód twierdzenia 4.1 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3.1 dla modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza i z tego powodu nie zostanie przedstawiony w tej monografii.

4.1.3. Adaptacja podstawowych równań zmodyfikowanego modelu

Parametry modelu zostały oszacowane na podstawie danych rocznych o polskiej gospodarce w 2018 roku zaczerpniętych z Rocznika Statystycznego Rzeczypospolitej Polskiej 2019 (GUS, 2019), a także z baz danych Eurostatu, Banku Światowego oraz GUS. Z wymienionych źródeł danych statystycznych posłużyliśmy się danymi

o konsumpcji, kapitale rzeczowym (środki trwałe), produkcji, inwestycjach, podaży pieniądza, długu publicznym, zapasach, zatrudnieniu, średniej rocznej płacy nominalnej, koszcie pracy, oraz podaży i popycie na pracę.

Tabela 4.1. Dane roczne o polskiej gospodarce w 2018 roku

Nazwa zmiennej	Symbol	Wartość zmiennej (mln zł)
Kapitał rzeczowy (środki trwałe)	$K(0)$	4 029 717
Produkt krajowy brutto	$Y(0)$	2 121 555
Inwestycje	$I^a(0)$	440 550
w tym		
– nakłady na środki trwałe	$I(0)$	386 448
– przyrost rzeczowych środków obrotowych		53 696
Konsumpcja prywatna	$C(0)$	1 220 916
Konsumpcja publiczna	$G(0)$	374 691
Liczba pracujących	$L^d(0)$	16,020
Liczba aktywnych zawodowo	$L(0)$	16,989
Podaż pieniądza	$M(0)$	1 012 353
Zapasy	$N(0)$	362 435
Dług sektora instytucji rządowych i samorządowych	$B(0)$	1 034 358
Eksport	$EX(0)$	1 171 978
Import	$IM(0)$	1 107 002
Deficyt budżetowy (całkowity)	$\dot{B}(0)$	–5 193
Obsługa (całkowitego) długu Skarbu Państwa	$\frac{r(0)B(0)}{p(0)}$	21 524
Średnia roczna płaca nominalna	$w(0)$	0,0583

Źródło: (GUS, 2019).

Pozostałe wielkości, tj. konsumpcja pracowników, oczekiwana sprzedaż, popyt oraz inwestycje przeznaczone na zapasy (korekta produkcji względem oczekiwanej sprzedaży), a także parametry modelu, obliczyliśmy z równań modelu.

Na podstawie danych statystycznych ustaliliśmy, że popyt całkowity (sprzedaż) w 2018 roku był równy:

$$Y^d(0) = C(0) + I(0) + G(0) + NX(0) = 2\,047 \text{ mld zł}, \quad (4.1.34)$$

gdzie wartości $C(0)$, $G(0)$, $I(0)$ oraz $NX(0) = EX(0) - IM(0)$ – wartość eksportu netto w 2018 roku, przyjęto z Rocznika Statystycznego (tabela 4.1).

Uwaga 4.1. W eksperymentach komputerowych zakładamy, że wartości zmiennych: oczekiwana sprzedaż Y^e i oczekiwana stopa zysku z kapitału rzeczowego ρ^e

w roku bazowym, tzn. w roku 2018, są równe odpowiadającym im wielkościom rzeczywistym w 2018 roku.

Na przykład przyjmujemy, że oczekiwany popyt w 2018 roku $Y^e(0)$ był równy rzeczywistej wartości popytu w tym samym roku $Y^d(0)$:

$$Y^e(0) = Y^d(0) = 2\,047 \text{ mld zł.} \quad (4.1.35)$$

Teraz zajmiemy się oszacowaniem rocznej realnej płacy brutto ω w 2018 roku. W tym celu posłużymy się zdefiniowaną w rozdziale pierwszym zmienną określającą udział płac w PKB:

$$U = \frac{\omega L^d}{Y}. \quad (4.1.36)$$

Według danych United Nations Global Sustainable Development Goals udział płac nominalnych w PKB⁴⁰ od 2007 do 2019 roku mieścił się w granicach między 45 a 50%. W 2018 roku wyniósł około 48%. Taką wartość przyjmujemy w symulacjach.

Uwaga 4.2. W symulacjach komputerowych zakładamy, że poziom cen p w okresie bazowym, tzn. w 2018 roku, był równy 1 ($p(0) = 1$).

Zgodnie z uwagą 4.2 oraz definicją realnej płacy brutto $\omega = w/p$, w symulacjach przyjmujemy, że w 2018 roku nominalna stawka płac brutto $w(0)$ była równa realnej płacy brutto:

$$w(0) = \omega(0) \cdot p(0) = \omega(0) \cdot 1 = \omega(0). \quad (4.1.37)$$

Do równania (4.1.36) podstawiamy wartości zmiennych $L^d(0)$ i $Y(0)$ z tabeli 4.1 oraz $U(0) = 0,48$. Obliczamy realną stawkę płac brutto w 2018 roku:

$$\omega(0) = 66,2 \text{ tys. zł}^{41}. \quad (4.1.38)$$

Ze wzorów (4.1.37) i (4.1.38) mamy:

$$w(0) = \omega(0) = 66,2 \text{ tys. zł.}$$

⁴⁰ Udział pracy w produkcie krajowym brutto (PKB) to całkowite wynagrodzenie (obejmujące wynagrodzenia oraz transfery z systemu zabezpieczenia społecznego) pracowników wyrażone jako procent PKB, który stanowi miarę całkowitej produkcji. Wskaźnik ten informuje, jaki jest względny udział produktu przeznaczonego na wynagrodzenia pracowników w porównaniu z udziałem przypadającym na kapitał w procesie produkcji w danym okresie odniesienia.

⁴¹ Według danych GUS (tabela 4.1) przeciętna stawka płac w 2018 roku wyniosła 58,3 tys. zł. Powstała różnica może wynikać m.in. ze sposobu obliczania tych zmiennych. Jeśli w symulacjach przyjęlibyśmy płace z danych statystycznych, udział płac w PKB byłby równy 44%.

W symulacjach realną stopę zysku z kapitału trwałego ρ w 2018 roku określa nowe równanie (4.1.8):

$$\rho(0) = \frac{(1 - \tau_p) Y^d(0) - (1 + \tau_1) \omega(0) L^d(0) - \delta K(0)}{K(0)},$$

gdzie $\tau_p > 0$ to stały w czasie wskaźnik określający stosunek podatków pośrednich do podatków całkowitych, $\tau_1 > 0$ to stawka składki na ubezpieczenie społeczne od wynagrodzeń płaconą przez pracodawcę, $Y^d(0)$ to realna sprzedaż w 2018 roku (z podatkiem pośrednim), $(1 + \tau_1) \omega(0) L^d(0)$ – całkowity, realny koszt zatrudnienia wszystkich pracowników w 2018 roku ($\omega(0) L^d(0)$ to realne wynagrodzenia brutto wszystkich pracowników), $\delta K(0)$ to realna wartość deprecjacji kapitału trwałego w 2018 roku, $\delta > 0$ – stała w czasie stopa deprecjacji kapitału trwałego.

Żeby wyznaczyć realną stopę zysku z kapitału trwałego ρ w 2018 roku, posługując się równaniem (4.1.6), musimy najpierw obliczyć współczynnik τ_p , stawkę τ_1 oraz stopę deprecjacji kapitału trwałego δ .

Zacznijmy od wyznaczenia współczynnika τ_p . Współczynnik ten, zgodnie z jego definicją, obliczamy, korzystając z równania (4.1.7):

$$\tau_p = \frac{T_p(0)}{Y^d(0)}.$$

Według danych Eurostatu podatek pośredni T_p (podatek akcyzowy, podatek od towarów i usług (VAT) i podatek od gier) w 2018 roku wyniósł około 302 mld zł. Korzystając z obliczonej wcześniej wartości sprzedaży $Y^d(0)$ w 2018 roku, z powyższego wzoru możemy wyznaczyć współczynnik τ_p :

$$\tau_p = \frac{T_p(0)}{Y^d(0)} = 15\%.$$

W Polsce pracodawca, poza wynagrodzeniami brutto wypłacanymi zatrudnionym pracownikom, ponosi dodatkowe obciążenie, którym jest składka na ubezpieczenie społeczne. W naszym modelu KMG wartość tego ubezpieczenia jest równa $\tau_1 \omega L^d$, gdzie τ_1 to stawka tego ubezpieczenia (wartość obciążenia pracodawcy płaconą za wypłacane wynagrodzenie na ubezpieczenie społeczne). W 2018 roku wg danych udostępnionych przez ZUS całkowita składka na ubezpieczenie społeczne zapłaconą przez pracodawców była równa około 70 mld zł, co możemy zapisać jako:

$$\tau_1 \omega(0) L^d(0) = 70 \text{ mld zł}.$$

Znając wartość sumy realnych wynagrodzeń brutto wszystkich pracowników w 2018 roku, $\omega(0) L^d(0)$, z tego wzoru możemy obliczyć stawkę składki na ubezpieczenie społeczne płaconą przez pracodawców τ_1 :

$$\tau_1 = 7\%.$$

Według danych Banku Światowego tempo zużycia kapitału trwałego w Polsce w 2018 roku było równe około 12% PKB. Jak wynika z danych GUS (tabela 4.1), kapitał trwały (środki trwałe) w 2018 roku był około dwa razy większy niż PKB ($K(0)/Y(0) = 1,9$). Zatem stopa deprecjacji kapitału trwałego wynosi:

$$\delta = 0,06 = 6\%.$$

Podstawiając dane z tabeli 4.1 oraz wyznaczone powyżej parametry τ_1 i δ do równania (4.1.6), możemy wyznaczyć wartość stopy zysku z kapitału trwałego w 2018 roku:

$$\rho(0) = 11\%.$$

W kolejnym kroku oszacujemy stawkę podatkową od zysku z kapitału trwałego i odsetek z posiadanych obligacji τ_c oraz stawkę podatkową od wynagrodzeń z pracy τ_w i stawkę składki na ubezpieczenie społeczne płaconą przez pracowników najemnych τ_2 (do eksperymentów symulacyjnych wystarczy znajomość sumy tych dwóch składek $\tau = \tau_w + \tau_2$).

W symulacjach dla uproszczenia przyjmujemy, że podatek od zysku z kapitału trwałego i odsetek z posiadanych obligacji to podatek CIT (w rzeczywistości dochód z obligacji podlega podatkowi w wysokości 19% i jest ujęty w zeznaniach podatkowych PIT). Według danych GUS wartość podatku CIT w 2018 roku wyniosła około 44,3 mld zł. Żeby obliczyć stawkę podatkową τ_c , skorzystamy z równania modelu (4.1.12):

$$T_c = \tau_c \left(\rho K + \alpha_3 \frac{rB}{p} \right),$$

gdzie T_c – wartość podatku od zysku z kapitału trwałego i odsetek z posiadanych obligacji (podatek CIT), ρK – zysk z kapitału, rB/p – odsetki z posiadanych obligacji, α_3 – stały w czasie stosunek wartości obligacji w posiadaniu podmiotu krajowego do wartości wszystkich obligacji.

Z tabeli 4.1 odczytujemy wartości zmiennych: $\frac{r(0)B(0)}{p(0)}$ – obsługa całkowita długu publicznego i $K(0)$ – kapitał trwały. Z wyżej przeprowadzonych obliczeń mamy wskaźnik rentowności kapitału $\rho(0) = 11\%$. Przyjmujemy, że w 2018 roku ceny były równe $p(0) = 1$ (zob. uwaga 4.2). Według danych GUS stosunek wartości obligacji w posiadaniu podmiotu krajowego do wartości wszystkich obligacji wynosi około 0,73, więc w symulacjach przyjmujemy $\alpha_3 = 0,73$. Zatem, korzystając ze wzoru (4.1.12), możemy wyznaczyć stawkę podatku τ_c :

$$\tau_c = 9,4\%.$$

Stawkę podatkową od wynagrodzeń z pracy τ_w i stawkę składki na ubezpieczenie społeczne τ_2 obliczymy, wykorzystując równania (4.1.10) i (4.1.11):

$$T_{w2} = \tau_w \omega L^d + \tau_2 \omega L^d = \tau' \omega L^d,$$

gdzie $\tau' = \tau_w + \tau_2$. Według danych GUS wartość podatku od wynagrodzeń z pracy w 2018 roku wyniosła około 11% procent PKB (z tego stawka PIT 5% PKB oraz stawka składki na ubezpieczenie społeczne płacona przez pracowników 6% PKB), co możemy zapisać jako:

$$\frac{T_{w2}(0)}{Y(0)} = 11\%, \quad (4.1.39)$$

Po podstawieniu zależności (4.1.11) do wzoru (4.1.39) otrzymujemy:

$$\frac{\tau' \omega(0) L^d(0)}{Y(0)} = 11\%,$$

a po przekształceniach mamy:

$$\tau' = \tau_w + \tau_2 = 11\% \cdot \frac{Y(0)}{\omega(0) L^d(0)} = \frac{11\%}{U(0)} = 22,7\%, \quad (4.1.40)$$

gdzie $U(0) = 0,48$ (udział płac w PKB). W ten sam sposób możemy wyznaczyć stawki τ_w i τ_2 :

$$\tau_2 = 12,3\%, \quad \tau_w = 10,4\%.$$

W kolejnym kroku wyznaczmy współczynnik α_1 , który oznacza stałą w czasie stosunek transferów publicznych do płac realnych. Obliczymy go, podstawiając do równania (4.1.5) dane z tabeli 4.1: $C(0)$, $L^d(0)$, wyznaczoną wartość $\omega(0)$ (zob. wzór (4.1.38)) oraz obliczoną stawkę τ (wzór (4.1.40)):

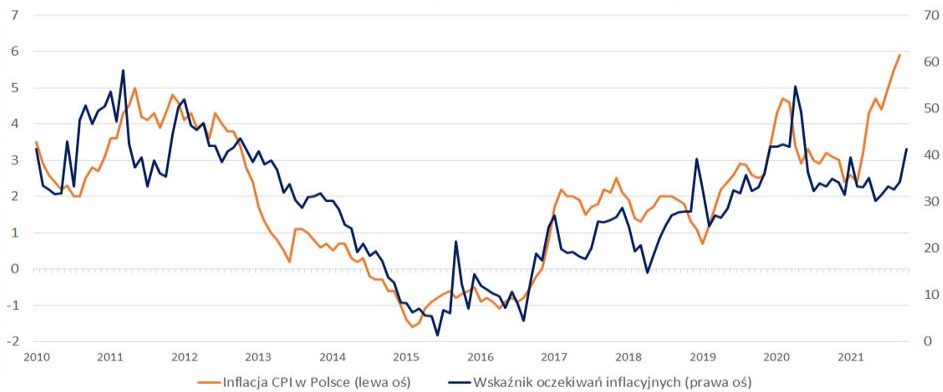
$$\alpha_1 = \frac{C(0)}{\omega(0) L^d(0)} + \tau - 1 = 0,42.$$

Według danych GUS (rysunek 4.1) stopa inflacji (CPI, wskaźnika cen i usług konsumpcyjnych) w 2018 roku wyniosła:

$$\pi(0) = 1,6\%.$$

Z kolei oczekiwana stopa inflacji, według tego samego źródła, w 2018 roku wahała się w przedziale od 0 do 1,5%. W symulacjach przyjmujemy, że oczekiwania inflacyjne w roku początkowym wynoszą:

$$\pi^e(0) = 0\%.$$



Rysunek 4.1. Oczekiwania inflacyjne Polaków na tle inflacji w latach 2010–2022

Źródło: Bankier.pl na podstawie danych GUS.

Narodowy Bank Polski podaje (NBP, b.r.b), że wartość stopy procentowej w tym samym roku była równa około:

$$r = 2\%.$$

W omawianym modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza stopa procentowa r jest zmienną wynikową zależną od podaży pieniądza M , oczekiwanego popytu Y^e i aktualnych cen p :

$$r \equiv r(M, Y^e, p) = h \frac{pY^e}{M},$$

gdzie $h > 0$ to parametr reakcji, którego wartość jest stała w czasie.

Wartość stopy procentowej r jest ustalana przez bank centralny. Z tego powodu wartość tę w symulacjach modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza interpretujemy jako wskaźnik rentowności obligacji. Dlatego jego wartość w stanie początkowym obliczymy, dzieląc odsetki z posiadanych obligacji w 2018 roku (koszt obsługi długu publicznego): $rB = 29,5$ mld zł, przez całkowity dług w 2018 roku: $B(0) = 1035$ mld zł (tabela 4.1). Obliczony w ten sposób wskaźnik jest równy około:

$$r(0) = 3\%.$$

W tabeli 4.2 przedstawiono wartości omawianych parametrów dla polskiej gospodarki w 2018 roku.

Tabela 4.2. Podsumowanie wartości parametrów dla polskiej gospodarki w 2018 roku

Parametr			Źródło danych i metoda kalibracji
Nazwa	Symbol	Wartość	
Stosunek produkcji potencjalnej do kapitału trwałego	y^p	0,65	na podstawie równania modelu: $y^p = y(0)/u(0)$, gdzie $y(0) = Y(0)/K(0)$ – dane GUS, $u(0) = 0,81$ – dane: Trading Economics (b.r.)
Naturalna wartość wykorzystania zdolności produkcyjnych	$\bar{u}$	0,85	Turovsky (2022)
Naturalna stopa zatrudnienia	$\bar{V}$	0,95	w badaniach empirycznych naturalną stopę bezrobocia (NAIRU) szacuje się na poziomie 5% (Konopczyński, 2015; Staiger i in., 1997)
Stopa wzrostu wydajności pracy	n	0,03	według danych Eurostatu stopa wzrostu wydajności pracy w 2018 roku była równa 3%
Stopa wzrostu podaży pieniądza	μ	0,05	NBP
Konsumpcja publiczna na jednostkę kapitału	g	0,09	na podstawie wzoru $G(0) = gK(0)$ oraz danych o $G(0)$ i $K(0)$ z tabeli 4.1
Współczynnik deprecjacji kapitału	δ	0,06	Bank Światowy
Stawka podatkowa od wynagrodzeń za pracę	τ_w	10,4%	obliczenia własne
Stawka podatkowa od zysku z kapitału i odsetek z obligacji	τ_c	9,4%	obliczenia własne
Stawka składki na ubezpieczenie społeczne płacona przez pracodawców	τ_1	7%	obliczenia własne
Stawka składki na ubezpieczenie społeczne płacona przez pracowników	τ_2	12,3%	obliczenia własne
Stosunek podatków pośrednich do popytu całkowitego	τ_p	15%	obliczenia własne
Stosunek transferów publicznych do realnych płac brutto	α_1	0,42	obliczenia własne

4.1.4. Kalibracja parametrów reakcji za pomocą programu Solver

W podrozdziale tym zostaną wyznaczone parametry reakcji: $\beta_n, \beta_{N^d}, \beta_Z, \beta_w, \beta_p, \beta_{y^e}, \kappa_p, \kappa_w, i_1, i_2, h$. Na podstawie równań modelu oraz danych statystycznych w łatwy sposób można jedynie wyznaczyć parametry β_{N^d} oraz h . Uzyskanie pozostałych parametrów reakcji za pomocą równań modelu oraz dostępnych danych statystycznych jest zadaniem trudnym, wymagającym zaawansowanych metod ekonometrycznych⁴². W niniejszej monografii kalibracja tych parametrów została ograniczona do prostej metody polegającej na rozwiązaniu układu dwóch równań (4.1.21)–(4.1.22), w którym niewiadomymi są parametry: $\beta_n, \beta_{N^d}, \beta_Z, \beta_w, \beta_p, \beta_{y^e}, \kappa_p, \kappa_w, i_1, i_2$, a pozostałe wielkości są obliczone z wykorzystaniem danych statystycznych. Wadą tej metody jest nieskończona liczba rozwiązań układu równań (4.1.21)–(4.1.22) wynikająca z większej liczby niewiadomych niż równań. Drugą wadą tej metody jest problem wyboru do dalszych badań przykładowego zestawu parametrów, będącego rozwiązaniem układu równań (4.1.21)–(4.1.22). Mimo tych wad metoda ta jest wystarczająca do zbadania najważniejszych własności modelu potrzebnych do odpowiedzi na pytania postawione w niniejszej monografii.

Kalibrację parametrów reakcji zaczynamy od wyznaczenia, korzystając z danych statystycznych (tabela 4.1) oraz równań omawianego modelu, parametrów β_{N^d} oraz h :

$$\beta_{N^d} = \frac{N(0)}{Y^e(0)} = 0,17, \quad h = \frac{r(0)M(0)}{p(0)Y^e(0)} = 0,02.$$

W dalszej kolejności rozwiązujemy układ równań (4.1.21)–(4.1.22).

Wartości zmiennych y i y^d ustalono na podstawie równań modelu i danych statystycznych:

$$y = \frac{Y(0)}{K(0)} = 0,53, \quad y^d = \frac{Y^d(0)}{K(0)} = 0,52.$$

Z kolei za wartości parametrów: $\alpha_1, \alpha_2, y^p, \bar{u}, n, \mu, g, \delta, \bar{V}, \tau_w, \tau_c, \xi$, przyjęliśmy wielkości zaprezentowane wraz ze sposobem ich oszacowania w tabeli 4.2. Układ równań (4.1.21)–(4.1.22) ma więcej niewiadomych niż równań, co może oznaczać, że ma nieskończenie wiele rozwiązań. Żeby wyznaczyć przykładowe rozwiązanie tego układu, w którym za niewiadome przyjmujemy parametry reakcji: $\kappa_w, \kappa_p, \beta_n, \beta_Z, \beta_{y^e}, \beta_p, i_1, i_2$, korzystamy z dodatku programu MS Excel – Solver. Po wprowadze-

⁴² Innym sposobem kalibracji parametrów reakcji jest wykorzystanie narzędzi ekonometrycznych zaprezentowane w pracy Charpe'a i in. (2011). Autorzy do estymacji parametrów wykorzystali metodę zmiennych instrumentalnych (*two-stage least squares*, 2SLS).

Tabela 4.3. Wartości parametrów reakcji obliczone za pomocą MS Excel – Solver

Parametr		Wartość				
		Zestaw 1	Zestaw 2	Zestaw 3	Zestaw 4	Zestaw 5
κ_w	waga wpływu aktualnej inflacji i oczekiwanej inflacji na stopę wzrostu płac nominalnych	0,30				
κ_p	waga wpływu nadwyżki stopy wzrostu płac nominalnych ponad stopę wzrostu wydajności pracy i oczekiwanej inflacji na inflację cen	0,80				
β_n	reakcja produkcji na różnicę między popytem na zapasy a podażą zapasów	0,10	0,10	0,20	0,10	0,10
β_z	reakcja wielkości produkcji na przyrost oczekiwanego popytu	0,40	0,40	0,57	0,40	0,40
β_{π^e}	reakcja oczekiwań inflacyjnych na błąd dotyczący oczekiwań inflacyjnych	0,10	0,20	0,05	0,20	0,20
β_p	reakcja cen na lukę produkcyjną	0,60	0,60	0,20	0,36	0,36
β_w	reakcja nominalnych płac na zmiany zachodzące na rynku pracy	0,40	0,60	0,60	0,70	0,70
β_{y^e}	reakcja stopy wzrostu oczekiwanego popytu na względny błąd oczekiwań dotyczących wielkości łącznego popytu	0,04	0,03	0,03	0,10	0,14
i_1	reakcja popytu inwestycyjnego na różnicę między stopą zysku z kapitału a realną stopą procentową	2,00	2,10	2,50	2,10	2,10
i_2	reakcja popytu inwestycyjnego na lukę produkcyjną	0,10	0,20	0,30	0,20	0,20
α	waga wpływu aktualnej inflacji i oczekiwanej inflacji na przyrost oczekiwań inflacyjnych	0,10				
Stan stacjonarny		lokalnie asymptotycznie stabilny			marginalnie stabilny*	niestabilny

* Układ jest marginalnie stabilny, jeśli nie jest ani asymptotycznie stabilny, ani niestabilny. Stan marginalnie stabilny odnosi się do sytuacji, w której układ utrzymuje się wokół stanu stacjonarnego, ale nie dąży asymptotycznie do tego stanu.

Źródło: obliczenia własne.

niu wyznaczonych zmiennych i parametrów modelu, wraz z następującymi ograniczeniami wartości powyższych parametrów:

- parametry reakcji: $\kappa_w, \kappa_p, \beta_n, \beta_z, \beta_{y^e}, \beta_p, i_1, i_2$ są wielkościami dodatnimi,
- wartości parametrów κ_w oraz κ_p są mniejsze od 1,
- wartości parametrów $\beta_n, \beta_z, \beta_{y^e}, \beta_p$ oraz i_2 są mniejsze od 1,
- parametr i_1 ma wartość większą od 1,

za pomocą programu Solver ustaliliśmy kilka zestawów wartości tych parametrów. Na podstawie analizy stabilności stanu stacjonarnego z wyznaczonych zestawów parametrów do dalszej analizy przyjęliśmy pięć, które przedstawiono w tabeli 4.3. Przyjęte powyżej ograniczenia wartości parametrów wynikają z założeń dowodu stabilności stanu stacjonarnego modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza.

Żeby z ekonomicznego punktu widzenia porównać gospodarki opisane powyższymi pięcioma zestawami wartości parametrów reakcji (wartości pozostałych parametrów są takie same w każdym z pięciu wariantów), przypomnijmy równania modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza, w których te parametry występują:

$$\hat{w} = \beta_w(V - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^e + n, \quad (4.1.41)$$

$$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p) \pi^e, \quad (4.1.42)$$

$$\pi^e = \beta_{\pi^e}(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \bar{\pi} - \pi^e), \quad (4.1.43)$$

$$\dot{K} = i_1(\rho - (r - \pi^e))K + i_2(u - \bar{u}) + \hat{Y}^e K, \quad (4.1.44)$$

$$\hat{Y}^e = \hat{w} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}, \quad (4.1.45)$$

$$Y = Y^e + \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n(N^d - N). \quad (4.1.46)$$

Porównując zestawy parametrów, zakładamy, że zestaw 1 jest zestawem podstawowym, tzn. będziemy porównywać jedynie zestaw 1 z pozostałymi zestawami. Dla ułatwienia w tabeli 4.4 przedstawiono takie porównanie.

Istotną różnicą między zestawami 1–5 jest rodzaj stabilności stanu stacjonarnego gospodarki. Gospodarka opisana zestawami 1–3 po pewnym czasie będzie się rozwijała równomiernie ze stałą stopą wzrostu (stan stacjonarny jest lokalnie asymptotycznie stabilny). Natomiast w wypadku zestawu 4 uzyskujemy cykliczny charakter wzrostu gospodarki, a więc będzie się ona rozwijała ze zmienną stopą wzrostu. Zestaw 5 reprezentuje gospodarkę niestabilną, w której zmienne po pewnym czasie gwałtownie rosną lub maleją.

Zestawy 2, 4 i 5 charakteryzują gospodarkę z szybszą reakcją oczekiwań inflacyjnych (wzór (4.1.43)) na błąd w oszacowaniu inflacji w poprzednim okresie w porównaniu z zestawem 1 (większa wartość parametru β_{π^e}). Również stopa wzrostu

Tabela 4.4. Porównanie zestawu parametrów reakcji 1 z zestawami 2, 3, 4 i 5

Parametr	Wartość/różnica				
	Zestaw 1	Zestaw 2	Zestaw 3	Zestaw 4	Zestaw 5
κ_w	0,30				
κ_p	0,80				
β_n	0,10		$\beta_n \uparrow \circ 0,1$	0,10	
β_z	0,40		$\beta_z \uparrow \circ 0,17$	0,40	
β_{π^e}	0,10	$\beta_{\pi^e} \uparrow \circ 0,1$	$\beta_{\pi^e} \downarrow \circ 0,05$	$\beta_{\pi^e} \uparrow \circ 0,1$	$\beta_{\pi^e} \uparrow \circ 0,1$
β_p	0,60		$\beta_p \downarrow \circ 0,4$	$\beta_p \downarrow \circ 0,24$	$\beta_p \downarrow \circ 0,24$
β_w	0,40	$\beta_w \uparrow \circ 0,2$	$\beta_w \uparrow \circ 0,2$	$\beta_w \uparrow \circ 0,3$	$\beta_w \uparrow \circ 0,3$
β_{y^e}	0,04	$\beta_{y^e} \downarrow \circ 0,01$	$\beta_{y^e} \downarrow \circ 0,01$	$\beta_{y^e} \uparrow \circ 0,06$	$\beta_{y^e} \uparrow \circ 0,1$
i_1	2,00	$i_1 \uparrow \circ 0,1$	$i_1 \uparrow \circ 0,5$	$i_1 \uparrow \circ 0,1$	$i_1 \uparrow \circ 0,1$
i_2	0,10	$i_2 \uparrow \circ 0,1$	$i_2 \uparrow \circ 0,2$	$i_2 \uparrow \circ 0,1$	$i_2 \uparrow \circ 0,1$
α	0,10				
Stan stacjonarny	lokalnie asymptotycznie stabilny			marginalnie stabilny	niestabilny

Źródło: obliczenia własne.

nominalnej stawki płac (wzór (4.1.41)) jest w wypadku tych zestawów wartości parametrów bardziej wrażliwa na zmianę stopy zatrudnienia (za co odpowiada parametr reakcji β_w). Natomiast stopa wzrostu oczekiwanego popytu (wzór (4.1.45)) w gospodarce opisanej zestawem 1 silniej reaguje na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie niż w gospodarce opisanej zestawami 2 i 3 (parametr β_{y^e}). Odwrotna sytuacja występuje w wypadku zestawów 4 i 5, co może być przyczyną zmiany stabilności stanu stacjonarnego gospodarki w tych wypadkach (w zestawach 4 i 5 parametr β_{y^e} jest większy niż w zestawach 1–3). Reakcja popytu inwestycyjnego (wzór (4.1.44)) na różnicę między oczekiwanym zyskiem z kapitału trwałego a realną stopą procentową oraz na różnicę między wartością wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej a jej naturalną wartością jest mniejsza w wypadku gospodarki opisanej zestawem 1 niż w pozostałych przypadkach. W zestawach 3–5 w porównaniu z zestawem 1 uzyskujemy gospodarkę charakteryzującą się mniejszą wrażliwością rzeczywistej inflacji (wzór (4.1.42)) na zmianę wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej (parametr β_p). Zgodnie z definicją tego wskaźnika oznacza to, że wzrost produkcji spowoduje wyższy wzrost cen w gospodarce w wypadku zestawu 1 niż w wypadku zestawów 3–5 (przy niezmiennych wartościach pozostałych zmiennych). Z tabeli 4.4 można także odczytać, że gospodarka w wypadku zestawu 3 różni się od gospodarki opisanej zestawem 1 reakcją produkcji na zmianę stopy

wzrostu oczekiwanego popytu i różnicę między popytem a podażą zapasów (wzór (4.1.46)). Wzrost oczekiwanego popytu lub popytu na zapasy spowoduje większy wzrost produkcji w gospodarce w wypadku zestawu 3 niż w gospodarce opisanej zestawem 1 (parametry β_z oraz β_n).

Metoda wykorzystana do wyznaczenia wartości parametrów reakcji utrudnia interpretację wpływu ich wartości na stabilność stanu stacjonarnego. Zmiana jednego parametru jest kompensowana odpowiednią zmianą innych parametrów, aby spełniony był układ równań (4.1.21)–(4.1.22). Niemniej jednak w tabeli 4.4 można zaobserwować, że stabilność stanu stacjonarnego najbardziej jest wrażliwa na zmianę parametru reakcji β_{y^e} . A więc nawet niewielki wzrost reakcji produkcji na błąd w prognozie popytu może prowadzić do utraty stabilności stanu stacjonarnego, co jest zgodne z pierwszym założeniem twierdzenia 4.1 o lokalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego.

Podsumowując, można stwierdzić, że dla zestawów 1–3 stan stacjonarny gospodarki jest lokalnie asymptotycznie stabilny, dla zestawu 4 stabilny, a dla zestawu 5 niestabilny. Ponadto, porównując zestawy 1–3, zauważamy, że zestaw 1 wyróżnia się niską wartością parametru β_w wpływającego na wrażliwość stopy wzrostu nominalnej stawki płac na zmianę stopy zatrudnienia, dla zestawu 2 charakterystyczna jest wysoka wartość parametru β_{π^e} wpływającego na wrażliwość oczekiwanej inflacji na błąd prognozy inflacji w poprzednim okresie oraz niska wartość parametru β_{y^e} wpływającego na reakcję oczekiwanego popytu na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie, a zestaw 3 wyróżnia wysoka wartość parametru β_n wpływającego na siłę reakcji produkcji na odchylenie popytu na zapasy od ich podaży oraz wysoka wartość parametrów i_1 oraz i_2 , które wpływają na wrażliwość inwestycji na różnicę między oczekiwaną stopą zysku z kapitału rzeczowego a oczekiwaną realną stopą procentową. Zestaw ten charakteryzuje także niska wartość parametru β_p wpływającego na wrażliwość cen na lukę produkcyjną. Dodatkowo zauważamy, że w zestawie 3 wartość parametru β_{π^e} jest taka sama jak w zestawie 2. Zestawy 4 i 5 charakteryzuje wysoka wartość parametru β_{y^e} . W zestawie 5 w porównaniu z pozostałymi zestawami wartość parametru β_{y^e} jest najwyższa, co oznacza, że w tym zestawie wrażliwość oczekiwanego popytu na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie jest największa i ta cecha może być odpowiedzialna za utratę stabilności stanu stacjonarnego.

Przed przystąpieniem do symulacji komputerowych konieczne jest jeszcze wyznaczenie początkowych wartości zmiennych modelu intensywnego (4.1.14)–(4.1.22). Wartości te obliczyliśmy na podstawie definicji tych zmiennych oraz danych o polskiej gospodarce (tabela 4.1). Wyniki tych obliczeń wraz z definicjami zmiennych zostały przedstawione w tabeli 4.5.

Uwaga 4.3. Wartość zmiennej określającej wydajność pracy w 2018 roku $x(0)$ obliczamy, korzystając z równania $x(0) = \frac{Y(0)}{L^d(0)}$ (wzór (1.1.23)).

Tabela 4.5. Wartości początkowe zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej

Nazwa zmiennej	Wzór zmiennej	Wartość zmiennej
Udział płac w PKB	$U(0) = \frac{\omega(0)L(0)}{Y(0)}$	0,48
Pracochłonność pełnego zatrudnienia	$l(0) = \frac{x(0)L(0)}{K(0)}$	0,56
Realna podaż pieniądza na jednostkę kapitału rzeczowego	$m(0) = \frac{M(0)}{p(0)K(0)}$	0,36
Oczekiwana inflacja	$\pi^e(0)$	0
Oczekiwany popyt na jednostkę kapitału rzeczowego	$y^e(0) = \frac{Y^e(0)}{K(0)}$	0,52
Wielkość zapasów na jednostkę kapitału rzeczowego	$v(0) = \frac{N(0)}{K(0)}$	0,05
Stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału rzeczowego	$b(0) = \frac{B(0)}{p(0)K(0)}$	0,26

Źródło: obliczenia własne.

Uwaga 4.4. Z definicji zmiennych modelu intensywnego (4.1.14)–(4.1.22) wynika, że na stan początkowy nie mają wpływu wyznaczone za pomocą Solvera wartości parametrów reakcji. Oznacza to, że dla każdego zestawu parametrów reakcji (tabela 4.3) stan początkowy jest taki sam (tabela 4.5).

4.1.5. Podsumowanie

W podrozdziale zmodyfikowano kilka kluczowych równań modelu KMG omówionego w rozdziale pierwszym w celu uwzględnienia podczas symulacji komputerowych jak najwięcej informacji o polskiej gospodarce. Zastosowane modyfikacje nie wpłynęły na strukturę matematyczną modelu, dzięki czemu można przyjąć, że istnieje jeden stan stacjonarny zmodyfikowanego modelu KMG w postaci intensywnej oraz stan ten jest lokalnie asymptotycznie stabilny, co wynika z analizy modelu KMG przedstawionej w rozdziałach pierwszym oraz trzecim.

Wartości części parametrów modelu zostały wyznaczone za pomocą zmodyfikowanych równań modelu na podstawie informacji o polskiej gospodarce za 2018 rok. Natomiast wartości pozostałych parametrów obliczono, wykorzystując program komputerowy Solver. Procedura obliczania wartości parametrów przy użyciu tego programu polega na wyznaczeniu przykładowego rozwiązania (zestawu war-

tości parametrów) nieoznaczonego układu równań – w wypadku rozpatrywanego problemu układu dwóch równań z ośmioma niewiadomymi. Do symulacji komputerowych zaprezentowanych w kolejnym podrozdziale wyznaczono pięć różnych zestawów wartości parametrów wygenerowanych przez program Solver. Jednym z kryteriów wyboru zestawu parametrów był rodzaj stabilności stanu stacjonarnego.

Na podstawie definicji zmiennych modelu oraz danych o polskiej gospodarce wyznaczono także stan początkowy niezbędny do przeprowadzenia symulacji komputerowych w kolejnym podrozdziale.

4.2. Eksperymenty symulacyjne modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza

W niniejszym podrozdziale przedstawiono wyniki eksperymentów symulacyjnych przeprowadzonych na modelu KMG w wersji z egzogeniczną podażą pieniądza. Celem analizy było zbadanie dynamiki kluczowych zmiennych modelu w odpowiedzi na zmiany parametrów oraz ocena stabilności stanu stacjonarnego dla różnych ich wartości.

4.2.1. Procedury obliczeniowe

Dynamikę analizowanego modelu KMG opisuje układ siedmiu nieliniowych równań różniczkowych (4.1.14)–(4.1.20). Żeby na jego podstawie przeprowadzić symulacje komputerowe, najlepiej byłoby znać analityczną postać jego rozwiązania. To jednak, ze względu na nieliniowość równań układu, jest w zasadzie niemożliwe i dlatego konieczne jest zastosowanie jednej z metod numerycznych przybliżających rozwiązanie układu równań różniczkowych. Istnieje wiele takich metod, wśród nich metoda Eulera, którą się posłużyliśmy⁴³. Dla tej metody zastosowaliśmy krok $h = 1/12$ ⁴⁴.

⁴³ Dla układu równań (4.1.14)–(4.1.20) metoda Eulera jest wystarczająca, daje rozwiązanie z przybliżeniem, które nam odpowiada. A jednocześnie, w porównaniu z innymi metodami (np. metodą Rungego-Kutty rzędu drugiego i rzędu czwartego, metodą Dormanda-Prince'a, ulepszoną metodą Eulera (MIDPOINT)), jest stosunkowo prosta i pozwala szybko uzyskać wynik za pomocą obliczeń komputerowych.

⁴⁴ Przyjęta długość kroku $h = 1/12$ jest wystarczająco mała, aby przybliżyć rozwiązanie omawianego modelu ciągłego modelem dyskretnym, co pokazały liczne symulacje dla różnych długości kroków. Dodatkowo, biorąc pod uwagę, że dane wykorzystane w eksperymentach symulacyjnych są danymi rocznymi, długość kroku $h = 1/12$ odzwierciedla miesięczne przyrosty zmiennych modelu intensywnego.

Metoda Eulera dla modelu KMG

Niech X będzie wektorem o składowych $U, l, m, \pi^e, y^e, v, b$ zależnych od t . Podobnie niech F będzie wektorem o składowych f_i dla $i = 1, 2, \dots, 7$, gdzie:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= U \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right), \\
 f_2 &= l \left(n - \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) + \right. \\
 &\quad \left. - i_1 \left((1 - \tau_p) y^e - U y - \delta - \xi - \left(\frac{h y^e}{m} - \pi^e \right) \right) - i_2 \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right), \\
 f_3 &= m \left(\mu - \pi^e - n - \kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \hat{l} \right), \\
 f_4 &= \beta_{\pi^e} \left(\alpha \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) + \pi^e \right) + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e \right), \\
 f_5 &= y^e \left(\hat{U} + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) + \hat{l} \right), \\
 f_6 &= y - y^d - v(n - \hat{l}), \\
 f_7 &= \left(g + r b - \tau_c (\alpha_4 y^d - (1 + \tau_1) U y - \delta + \alpha_3 r b) - (\tau - \alpha_1) \tau_w U y \right) + \\
 &\quad - b \left(n - \hat{l} + \kappa \left(\beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) + \kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) \right) + \pi^e \right).
 \end{aligned}$$

Układ równań różniczkowych (4.1.14)–(4.1.20) możemy zapisać w postaci:

$$X'(t) = F(t, X), \quad (4.2.1)$$

z warunkiem początkowym:

$$X(t_0) = X_0.$$

Dodatkowo omawiany układ równań różniczkowych jest układem autonomicznym, czyli nie zależy od zmiennych niezależnych, w tym wypadku od zmiennej czasu, a więc równanie (4.2.1) możemy zapisać następująco:

$$X'(t) = F(X). \quad (4.2.2)$$

Zakładając, że rozwiązanie układu (4.2.2) istnieje i jest jednoznaczne, możemy przedstawić je w postaci wektora:

$$X(t) = (U(t), l(t), m(t), \pi^e(t), y^e(t), v(t), b(t)).$$

Wykorzystując metodę Eulera oraz równanie (4.2.2) i znając wartość $X(t)$ oraz $F(X(t))$, możemy obliczyć przybliżoną wartość funkcji $X(t+h)$ będącą rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$X(t+h) = X(t) + F(X(t))h.$$

Za pomocą powyższej metody możemy wyznaczyć przybliżone wartości rozwiązania układu równań (4.2.14)–(4.2.20).

Postać modelu KMG zastosowana w symulacjach komputerowych

$$U(t+s) = U(t) + sU(t) \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V(t) - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u(t) - \bar{u}) \right), \quad (4.2.3)$$

$$l(t+s) = l(t) + sl(t) \left(-\hat{U}(t+s) - \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) \right) + \\ + sl(t) \left(-i_1 \left(\rho^e(t) - \xi - (r(t) - \pi^e(t)) \right) - i_2 (u(t) - \bar{u}) \right), \quad (4.2.4)$$

$$m(t+s) = m(t) + sm(t) \left(\mu - n - \hat{p}(t+s) + \hat{l}(t+1) \right), \quad (4.2.5)$$

$$\pi^e(t+s) = \pi^e(t) + s\beta_{\pi^e} \left(\alpha \hat{p}(t+s) + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e(t) \right), \quad (4.2.6)$$

$$y^e(t+s) = y^e(t) + sy^e(t) \left(\hat{U}(t+s) + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) + \hat{l}(t+s) \right), \quad (4.2.7)$$

$$v(t+s) = v(t) + s \left(y(t) - y^d(t) - v(t) (n - \hat{l}(t+s)) \right), \quad (4.2.8)$$

$$b(t+s) = b(t) + \\ + s \left(g + r(t) b(t) - \tau_c \left(\rho(t) + \alpha_3 r(t) b(t) \right) - (\tau - \alpha_1) \tau_w U(t) y(t) \right) + \\ - b \left(n - \hat{l}(t+s) + \hat{p}(t+s) \right), \quad (4.2.9)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \frac{y(t)}{l(t)}, \quad u(t) = \frac{y(t)}{y^p}, \quad \hat{p}(t+1) = \left(\kappa \left(\kappa_p \beta_w (V(t) - \bar{V}) + \beta_p (u(t) - \bar{u}) \right) + \pi^e(t) \right), \\
 \rho^e(t) &= (1 - \tau_p) y^e(t) - (1 + \tau_1) U(t) y(t) - \delta, \\
 \rho(t) &= (1 - \tau_p) y^d(t) - (1 + \tau_1) U(t) y(t) - \delta, \\
 y^d &= (1 + \alpha_1 - \tau) y(t) U(t) + i_1 \left(\rho^e(t) - \xi - (r(t) - \pi^e(t)) \right) + i_2 (u(t) - \bar{u}) + \delta + g + \\
 &\quad + \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V(t) - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u(t) - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right), \\
 y(t) &= y^e(t) + \beta_n \beta_{N^d} y^e(t) - \beta_n v(t) + \\
 &\quad + y^e \beta_z \left(\kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V(t) - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u(t) - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) \right), \\
 \hat{l}(t+s) &= \frac{l(t+s) - l(t)}{l(t)}, \quad \hat{U}(t+s) = \frac{U(t+s) - U(t)}{U(t)}, \quad r(t) = \frac{h y^e(t)}{m(t)}.
 \end{aligned}$$

gdzie s to długość kroku⁴⁵. W symulacjach przyjmujemy, że $s = 1/12$.

4.2.2. Stany stacjonarne polskiej gospodarki przy różnych zestawach wartości parametrów reakcji

Do wyznaczania stanu stacjonarnego modelu (4.1.14)–(4.1.20) przyjęliśmy bazowy zestaw wartości egzogenicznych przedstawionych w tabeli 4.2 dla wszystkich pięciu symulacji. Z kolei zestawy wartości parametrów reakcji zaprezentowane w tabeli 4.3 (zestawy od 1 do 5) przyjęliśmy odpowiednio dla symulacji 1, 2, 3, 4 i 5. Przed zaprezentowaniem wartości zmiennych w stanie stacjonarnym dla wszystkich pięciu zestawów przypomnijmy równania zmiennych w stanie stacjonarnym:

$$\begin{aligned}
 \bar{\pi}^e &= \bar{\pi} = \mu - n, \quad V = \bar{V}, \quad u = \bar{u}, \\
 \bar{y} &= \bar{u} y^p, \quad \bar{l} = \frac{\bar{y}}{\bar{V}}, \quad \bar{m} = h \frac{\bar{y}^d}{\bar{r}}, \\
 \bar{y}^d &= \bar{y}^e = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} \bar{u} y^p, \quad \bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1 + \alpha_1 - \tau) \bar{y}},
 \end{aligned}$$

⁴⁵ W opisie metody Eulera długość kroku oznaczamy literą h . W omawianym modelu literą h oznaczamy jeden z parametrów reakcji określający reakcję popytu na pieniądź na zmianę oczekiwanego nominalnego popytu i nominalną stopę procentową. Z tego powodu w przedstawianych równaniach modelu do oznaczania kroku używamy litery s .

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}^e = (1 - \tau_p) \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{y} - \delta, \quad \bar{r} = \bar{\rho} + \bar{\pi} - \xi,$$

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c (\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{y} - \delta) - (\tau - \alpha_1) \bar{U} \bar{y}}{\alpha_3 \tau_c \bar{r} - \bar{\rho} + \xi + n}, \quad \bar{c} = \bar{y}^d - (n + \delta + g).$$

Z powyższych równań wynika, że parametry modelu, które wpływają na stan stacjonarny, to: $\mu, n, \bar{V}, \bar{u}, \beta_n, \beta_z, \beta_{N^e}, \alpha_1, \alpha_3, \tau, \tau_p, \tau_1, \delta, \xi, h, g$ oraz τ_c . A więc jedynymi parametrami wpływającymi na stan stacjonarny modelu, które zostały wyznaczone przy użyciu programu komputerowego Solver, są β_n oraz β_z . Z powyższego wynika, że stan stacjonarny dla zestawów 1, 2, 4 i 5 jest taki sam (mają te same wartości parametrów, od których zależy stan stacjonarny). Jedynie zestaw 3 może mieć inne wartości stanu stacjonarnego ze względu na różne wartości parametrów β_n oraz β_z (tabela 4.3).

W tabelach 4.6 i 4.7 zestawiono wartości zmiennych w stanie stacjonarnym modelu (4.1.14)–(4.1.20) z wartościami tych zmiennych w stanie początkowym. Jak wyżej wspomniano, dla zestawów 1, 2, 4 i 5 wartości zmiennych w stanie stacjonarnym są takie same, więc zaprezentujemy jedynie jedną tabelę (tabela 4.6) dla tych czterech zestawów. Natomiast stan stacjonarny dla zestawu 3 przedstawimy w osobnej tabeli (tabela 4.7).

Tabela 4.6. Porównanie wartości zmiennych modelu w stanie początkowym i w stanie stacjonarnym dla zestawów wartości parametrów 1, 2, 4 i 5

Nazwa zmiennej	Symbol	Stan początkowy	Stan stacjonarny	Różnica
Udział płac w PKB	U	0,480	0,560	0,080
Efektywna podaż pracy na jednostkę kapitału	l	0,560	0,582	0,022
Realna podaż pieniądza na jednostkę kapitału	m	0,350	0,358	0,008
Oczekiwana inflacja	π^e	0,000	0,020	0,020
Stosunek oczekiwanej sprzedaży do kapitału	y^e	0,521	0,549	0,027
Wielkość zapasów na jednostkę kapitału	v	0,048	0,122	0,074
Stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału	b	0,257	2,814	2,557
Stopa zatrudnienia	V	0,940	0,950	0,010
Wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnej	u	0,810	0,850	0,040
Stosunek produkcji do kapitału	y	0,535	0,553	0,018
Realna stopa procentowa	R	0,030	0,011	–0,019
Nominalna stopa procentowa	r	0,030	0,031	0,001
Stopa zysku z kapitału	ρ	0,108	0,076	–0,033
Inflacja rzeczywista	π	0,016	0,020	0,004
Stosunek popytu do kapitału	y^d	0,521	0,549	0,028
Konsumpcja prywatna do kapitału	c	0,300	0,369	0,069

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4.7. Porównanie wartości zmiennych modelu w stanie początkowym i w stanie stacjonarnym dla zestawu 3

Nazwa zmiennej	Symbol	Stan początkowy	Stan stacjonarny	Różnica
Udział płac w PKB	U	0,480	0,560	0,080
Efektywna podaż pracy na jednostkę kapitału	l	0,560	0,582	0,022
Realna podaż pieniądza na jednostkę kapitału	m	0,350	0,358	0,008
Oczekiwana inflacja	π^e	0,000	0,020	0,020
Stosunek oczekiwanej sprzedaży do kapitału	y^e	0,521	0,549	0,027
Wielkość zapasów na jednostkę kapitału	v	0,048	0,122	0,074
Stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału	b	0,257	2,814	2,557
Stopa zatrudnienia	V	0,940	0,950	0,010
Wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnej	u	0,810	0,850	0,040
Stosunek sprzedaży do kapitału	y	0,540	0,553	0,012
Realna stopa procentowa	R	0,028	0,011	-0,017
Nominalna stopa procentowa	r	0,028	0,031	0,003
Stopa zysku z kapitału	ρ	0,109	0,076	-0,033
Inflacja rzeczywista	π	0,016	0,020	0,004
Stosunek popytu do kapitału	y^d	0,517	0,549	0,032
Konsumpcja prywatna do kapitału	c	0,300	0,369	0,069

Źródło: obliczenia własne.

Z tabel 4.6 i 4.7 wynika, że odpowiednie wielkości zmiennych w stanie stacjonarnym są podobne dla wszystkich zestawów wartości parametrów reakcji. Dla zestawów 1, 2, 4 i 5 wniosek ten jest oczywisty. Natomiast w zestawie 3 wartości parametrów reakcji β_n , β_z są inne niż w pozostałych czterech zestawach (od parametrów β_n , β_z zależy stan stacjonarny, zob. wyżej). Oznacza to, że zmiana parametru reakcji β_n została skompensowana zmianą parametru reakcji β_z . W tabelach 4.6 i 4.7 zaprezentowano również różnice między wartościami zmiennych w stanie stacjonarnym i stanie początkowym. Oprócz stopy zysku $\bar{\rho}$ z kapitału trwałego w stanie stacjonarnym i realnej stopy procentowej w stanie stacjonarnym: $\bar{R} = \bar{r} - \bar{\pi}$ wartości zmiennych w stanie stacjonarnym są większe niż w stanie początkowym. Stopa zysku z kapitału trwałego: $\bar{\rho} = (1 - \tau_p) \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{y} - \delta$ ma mniejszą wartość w stanie stacjonarnym niż w stanie początkowym, ponieważ stosunek płac realnych do kapitału trwałego $\bar{U} \bar{y} = \omega L^d / K$ wzrasta bardziej niż stosunek realnego popytu do kapitału trwałego $\bar{y}^d = Y^d / K$. Natomiast to, że realna stopa procentowa ma mniejszą wartość w stanie stacjonarnym niż w stanie początkowym, wynika z tego, że stopa inflacji wzrasta znacznie, podczas gdy nominalna stopa procentowa tylko w niewielkim stopniu.

Żeby ocenić wartości pozostałych zmiennych w stanie stacjonarnym, zamiast wielkości na jednostkę kapitału, przedstawiono zmienne w bardziej standardowej

Tabela 4.8. Porównanie wartości zmiennych modelu wyrażonych na jednostkę PKB w stanie początkowym i w stanie stacjonarnym

Nazwa zmiennej	Stan początkowy	Stan stacjonarny	Różnica (%)
Udział płac w PKB	0,480	0,560	17
Realna podaż pieniądza na jednostkę PKB	0,654	0,647	-1
Wielkość zapasów na jednostkę PKB	0,090	0,221	146
Stosunek podaży obligacji do PKB	0,480	5,089	959
Stosunek popytu do PKB	0,974	0,993	2
Konsumpcja prywatna do PKB	0,561	0,667	19

Źródło: obliczenia własne.

formie, to znaczy na jednostkę PKB (tabela 4.8). W stanie stacjonarnym udział płac realnych w PKB w porównaniu ze stanem początkowym jest większy o około 17% i wynosi 56%, co oznacza, że część wartości dóbr i usług wytworzonych w gospodarce, która trafia do pracowników, wzrośnie o 17% i o tyle samo spadnie część wartości, która trafia do właścicieli środków produkcji (czyli posiadaczy kapitału i firm). W stanie stacjonarnym większa jest efektywna podaż pracy w stosunku do kapitału trwałego, czyli mniejsza liczba jednostek pracy będzie potrzebna do wytworzenia tej samej wielkości kapitału w porównaniu ze stanem początkowym. Realna podaż pieniądza w stosunku do PKB zmaleje o 1%, a zapasy na jednostkę PKB wzrosną aż o 146%. Z kolei popyt do PKB zwiększy się o 2%, co przede wszystkim jest efektem wzrostu konsumpcji w stosunku do PKB (wzrost o 19%).

Uwagę przykuwa bardzo duża wartość stosunku realnego zadłużenia sektora finansów publicznych do wielkości kapitału trwałego w stanie stacjonarnym, $\bar{b} = 2,814$, co daje ponad 500% PKB. Jedną z przyczyn tak dużej wartości tej zmiennej jest usunięcie z modelu możliwości finansowania budżetu sektora finansów publicznych kreacją pieniądza (por. wzory (4.1.3) i (4.1.9)). Drugą przyczyną są stosunkowo niskie stawki podatkowe i duże wydatki sektora finansów publicznych. Kolejnym powodem jest założenie, że udział zadłużenia sektora finansów publicznych w PKB w 2018 roku wynosił około 50% (jawny dług publiczny).

Ze względu na dodanie m.in. świadczeń emerytalnych i rentowych w równaniu deficytu sektora finansów publicznych (4.1.9), w analizie stanu stacjonarnego należy uwzględnić wartość szacowanego ukrytego długu publicznego⁴⁶. Z szacunków m.in. GUS, OECD lub Eurostatu wynika, że wartość ukrytego długu publicznego dla polskiej gospodarki jest kilkakrotnie wyższa niż jawny dług publiczny. Na

⁴⁶ Ukryty dług publiczny to finansowe zobowiązania państwa nieuwzględnione w jego sprawozdawczości budżetowej. Podstawowym jego źródłem są przyszłe zobowiązania państwa, m.in. z tytułu wypłaty emerytur i zasiłków dla bezrobotnych oraz funkcjonowania systemu opieki zdrowotnej (Esfahani i Kim, 2002, s. 1–2).

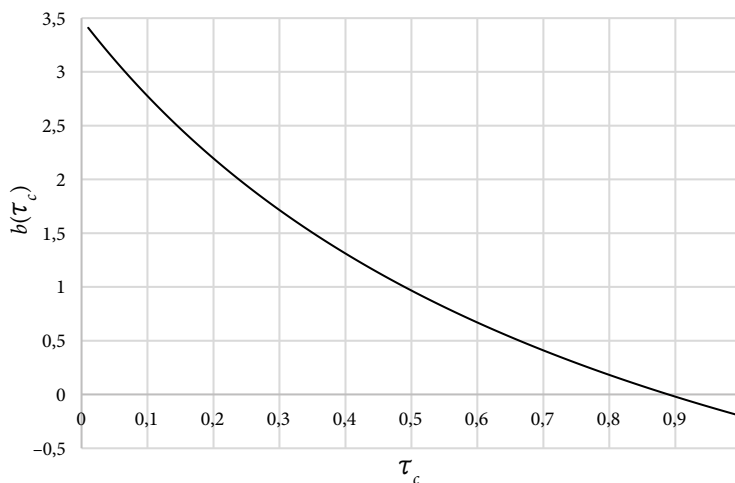
przykład według danych GUS ukryty dług publiczny na koniec 2018 roku wyniósł w Polsce 291,7% PKB, a oficjalny dług publiczny wg GUS w tym samym roku stanowił 48,9% PKB. Biorąc pod uwagę szacowany ukryty dług publiczny oraz to, że stan stacjonarny zostanie osiągnięty po kilkuset latach, wartość długu wynikająca z modelu nie jest już tak nierealistyczna.

Problem z dużą wielkością zadłużenia wynikającą z modelu możemy rozwiązać, zmieniając oszacowane wartości parametrów modelu, co wynika ze wzoru:

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c (\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{y} - \delta) - (\tau - \alpha_1) \bar{U} \bar{y}}{\alpha_3 \tau_c \bar{r} - \bar{\rho} + \xi + n}, \text{ gdzie } \alpha_4 = 1 - \tau_p + \frac{\tau_p}{\tau_c} = \text{const.}$$

Oczywiście zmiana wartości parametrów odpowiadających za wartość $\bar{b}$ ma konsekwencje. Może spowodować zmianę wartości innych zmiennych w stanie stacjonarnym. Jedynym parametrem, który nie wpływa na inne zmienne w stanie stacjonarnym, jest stawka podatku τ_c od zysku z kapitału trwałego i odsetek z obligacji. Oznacza to, że najprostszym sposobem uzyskania w modelu niskiego poziomu zadłużenia sektora finansów publicznych w stosunku do kapitału trwałego jest podwyższenie tej właśnie stawki podatkowej. Na rysunku 4.2 przedstawiono zależność zadłużenia sektora finansów publicznych w stosunku do kapitału trwałego od stawki podatku τ_c .

W Polsce w 1997 roku ustanowiono konstytucyjny limit zadłużenia w wysokości 60% PKB. Biorąc pod uwagę to, że kapitał trwały jest około dwa razy większy niż PKB, konstytucyjny limit zadłużenia w stosunku do kapitału trwałego jest równy



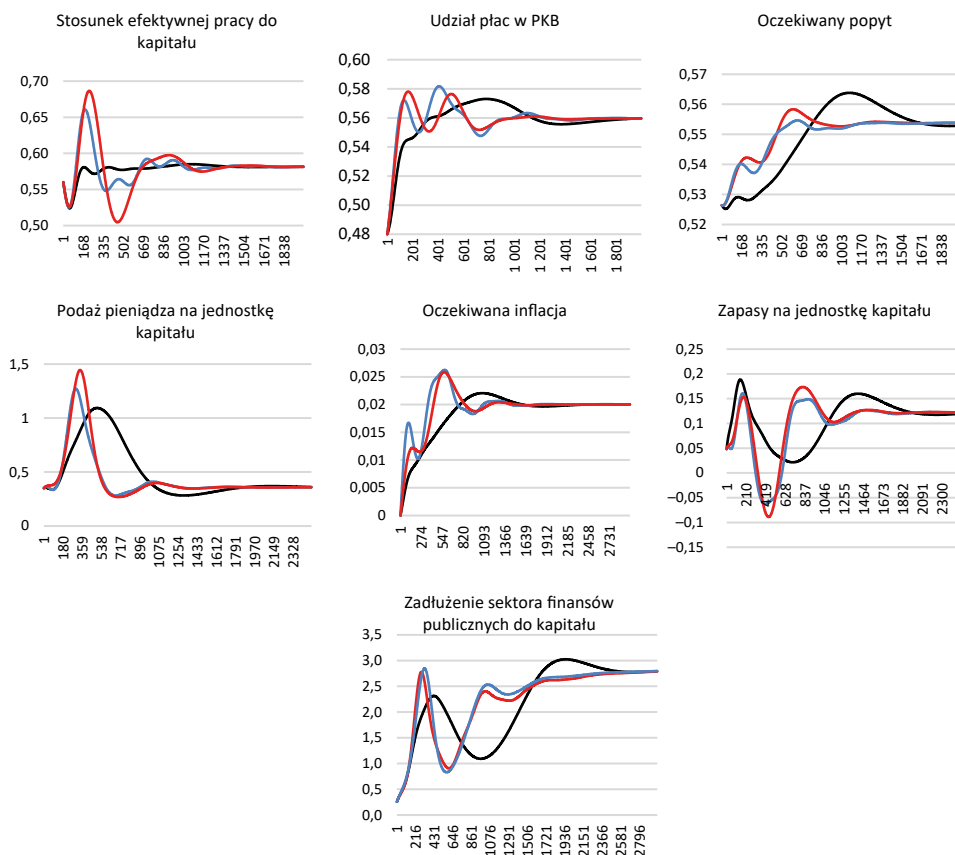
Rysunek 4.2. Wartość zmiennej b w stanie stacjonarnym w zależności od stawki podatku τ_c

Źródło: obliczenia własne.

około 30%. Z rysunku 4.2 wynika, że limit nie zostanie przekroczony, jeśli stawka podatku τ_c będzie większa niż 75%.

4.2.3. Scenariusze wzrostu polskiej gospodarki przy różnych zestawach wartości parametrów reakcji

W symulacjach przyjęliśmy dyskretną postać modelu KMG (4.2.3)–(4.2.9). Przed rozpoczęciem analizy wyników symulacji należy wspomnieć, że na wszystkich wykresach czas, przedstawiony na osi odciętych, jest mierzony w miesiącach (np. $t = 120$ oznacza 120 miesięcy, czyli 10 lat). Na rysunku 4.3 przedstawiono wykresy trajektorii zmiennych modelu w postaci intensywnej dla zestawów wartości parametrów reakcji 1, 2 i 3, z kolei na rysunku 4.5 dla zestawu 4, a na rysunku 4.7 dla



Rysunek 4.3. Dynamika zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej. Kolor niebieski – zestaw 1, kolor czerwony – zestaw 2, kolor czarny – zestaw 3

Źródło: obliczenia własne.

zestawu 5. Dodatkowo na rysunku 4.9 przedstawiono przykładowy sposób uniknięcia destabilizacji gospodarki opisanej modelem KMG dla piątego zestawu wartości parametrów za pomocą polityki fiskalnej. Na ostatnim rysunku, 4.9, porównano na podstawie wykresu funkcji produkcji (PKB) wzrost gospodarczy we wszystkich pięciu przypadkach.

Na rysunku 4.3 możemy zauważyć, że po około 900 okresach (czyli po około 75 latach) wartości sześciu pierwszych zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej stale zbliżają się do wartości w stanie stacjonarnym. Po początkowych wahanach wartości tych zmiennych stabilizują się mniej więcej w okresie $t = 2000$, czyli po około 170 latach. Natomiast trajektoria zmiennej b (stosunek długu sektora finansów publicznych do wartości kapitału rzeczowego), przedstawiona na ostatnim wykresie, stabilizuje się po okresie $t = 3000$, czyli po 250 latach. Różnica czasu dojścia do stanu stacjonarnego między zmienną b a pozostałymi zmiennymi wynika z tego, że zmienne modelu KMG w postaci intensywnej, z wyjątkiem zmiennej b , nie zależą od wartości b . Z drugiej strony zmienna b zależy od pozostałych zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej, co oznacza, że jej wartość ustabilizuje się dopiero po czasie, gdy pozostałe zmienne modelu intensywnego będą w stanie stacjonarnym.

Uwagę przykuwa to, że mimo różnych wartości parametrów reakcji, kształt wszystkich trajektorii zmiennych opisujących gospodarkę dla zestawów parametrów 1 i 2 (wykresy niebieski i czerwony) jest podobny. Z analizy wartości parametrów reakcji przedstawionych w tabeli 4.4 oraz z trajektorii przedstawionych na rysunku 4.3 wynika, że silniejsza reakcja nominalnych płac $\beta_w \uparrow$ na zmiany zachodzące na rynku pracy (zmiana stopy zatrudnienia), a także szybsza reakcja popytu inwestycyjnego $i_1 \uparrow, i_2 \uparrow$ na zmiany zachodzące w gospodarce oraz wolniejsza reakcja produkcji $\beta_{y^e} \downarrow$ na błąd prognozy przyszłej sprzedaży i szybsza reakcja oczekiwań inflacyjnych $\beta_{\pi^e} \uparrow$ nieznacznie wpływają na ogólny wzrost gospodarczy. Sytuacja ulega zmianie (zestaw 3), gdy ponadto w gospodarce ceny wolno reagują na zmiany koniunktury ($\beta_p \downarrow$), popyt inwestycyjny szybko reaguje na zmiany w gospodarce, w szczególności na różnicę między oczekiwaną stopą zysku z kapitału trwałego a oczekiwaną realną stopą procentową ($i_1 \uparrow, i_2 \uparrow$) oraz szybciej zmieniają się decyzje o wielkości produkcji w odpowiedzi na zmiany oczekiwań przyszłego popytu oraz zmiany różnicy między popytem i podażą zapasów ($\beta_n \uparrow, \beta_z \uparrow$). Taką gospodarkę reprezentuje zestaw 3 (wykres czarny). Dla zestawu 3, w porównaniu z zestawami 1 i 2, stosunek efektywnej pracy do kapitału rzeczowego szybciej dąży do stanu stacjonarnego, co wynika z dużo większej wartości parametru $i_1 \uparrow$. Powolna reakcja cen $\beta_p \downarrow$ na zmiany w koniunkturze przyczynia się do mniejszych wahań trajektorii w krótkim okresie.

Dokładniejsza analiza wpływu zmian wartości poszczególnych parametrów reakcji na trajektorie zmiennych jest utrudniona ze względu na sposób wyznaczania wartości tych parametrów (zob. punkt 4.1.4). Zmiana wartości tylko jednego

wybranego parametru reakcji wpływa na przykład na wartości zmiennych y i y^d , a dalej na wartości zmiennych V i u w stanie początkowym, co prowadzi do analizy innej gospodarki. W konsekwencji tracimy główną ideę tego rozdziału, którą jest analiza modelu KMG na podstawie danych o polskiej gospodarce.

Na rysunku 4.4 przedstawiono kilka wykresów ilustrujących trajektorie niektórych par zmiennych w przestrzeni fazowej. Ze względu na dużą liczbę zmiennych modelu intensywnego nie prezentujemy wszystkich kombinacji par zmiennych (jest ich 21). Natomiast, oprócz zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej, prezentujemy inne ciekawe z ekonomicznego punktu widzenia zmienne w przestrzeni fazowej.

Kształty trajektorii (rysunek 4.4) potwierdzają zawłość powiązań między zmiennymi modelu, co razem z brakiem wszystkich par zmiennych utrudnia ich dokładną analizę. Niemniej jednak, na podstawie kilku wykresów na rysunku 4.4 można się pokusić o próbę określenia związków między niektórymi zmiennymi (wszystkie dotyczą gospodarki opisaną drugim zestawem wartości parametrów reakcji):

1. Orbita stóp inflacji i bezrobocia (trajektoria 1) układa się w kształt opisywanej w literaturze krzywej Phillipsa (ujemna zależność między stopą zmiany cen, czyli inflacją, a poziomem bezrobocia).

2. Udział płac w PKB (trajektoria 2) oraz popyt na jednostkę kapitału (trajektoria 11) przejawiają dodatnią zależność z oczekiwanym popytem na jednostkę kapitału.

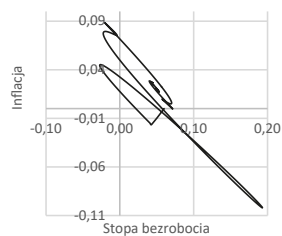
3. Konsumpcja prywatna na jednostkę PKB oraz dług sektora finansów publicznych są ujemnie skorelowane z nominalną stopą procentową (trajektorie 3 i 4). Warto przypomnieć, że z równań modelu intensywnego wynika zależność jednostronna między nominalną stopą procentową a długiem sektora finansów publicznych. Nominalna stopa procentowa wpływa na dług sektora finansów publicznych.

4. Istnieje dodatnia zależność między wartością współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej a udziałem płac w PKB (trajektoria 5).

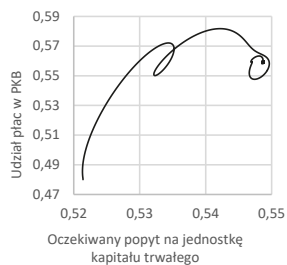
5. Brak korelacji między konsumpcją na jednostkę PKB a inflacją (trajektoria 6). Na początku rozpatrywanego horyzontu czasowego konsumpcja na jednostkę PKB rośnie mimo wzrostu cen. Gdy ceny przekroczą pewien akceptowany przez sektor prywatny poziom, konsumpcja na jednostkę PKB gwałtownie maleje, aż do momentu, gdy ceny zaczną maleć (deflacja cen). W chwili gdy ceny zmniejszą się do pewnego poziomu, konsumpcja na jednostkę PKB znowu zaczyna rosnąć, aż kolejny raz ceny zaczną rosnąć i przekroczą pewien akceptowany poziom. Kształt orbity konsumpcji na jednostkę PKB i stopy inflacji jest zbliżony do kształtu spirali zbieżnej.

6. Ciekawą relację można także zaobserwować między inwestycjami na jednostkę PKB a nominalną stopą procentową (trajektoria 7). W początkowych okresach inwestycje na jednostkę PKB maleją mimo stałej wartości nominalnej stopy procentowej. Dopiero gdy nominalna stopa procentowa zaczyna maleć, inwestycje na jednostkę PKB zaczynają rosnąć (oczywiste jest, że ta zmiana może być wywołana

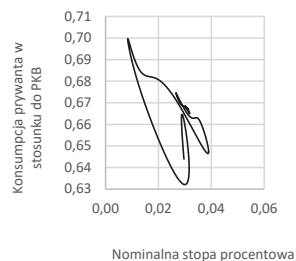
Trajektoria 1



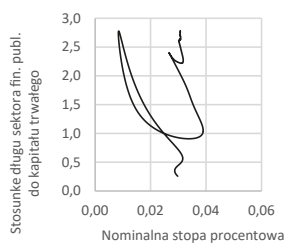
Trajektoria 2



Trajektoria 3



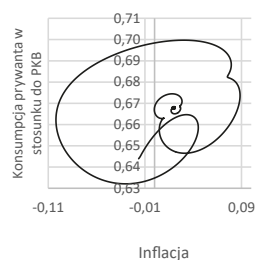
Trajektoria 4



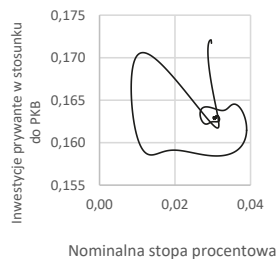
Trajektoria 5



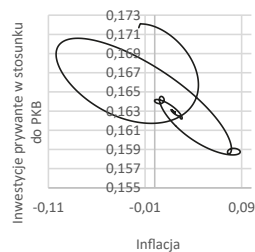
Trajektoria 6



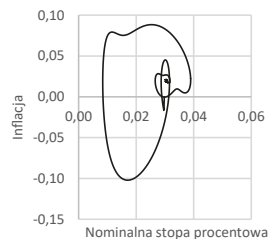
Trajektoria 7



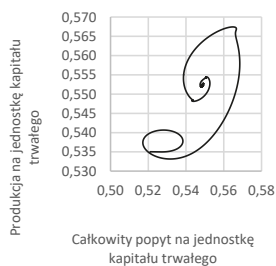
Trajektoria 8



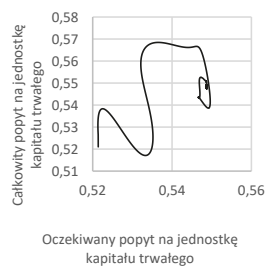
Trajektoria 9



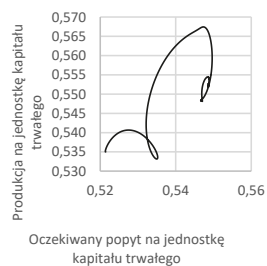
Trajektoria 10



Trajektoria 11



Trajektoria 12



Rysunek 4.4. Trajektorie w przestrzeni fazowej otrzymane dla zestawu 2 wartości parametrów reakcji

Źródło: obliczenia własne.

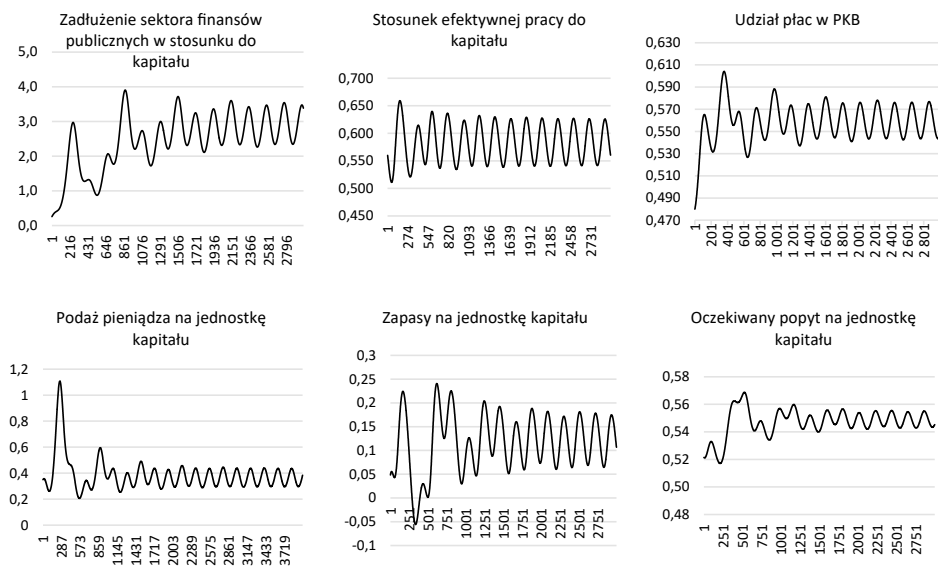
także innymi czynnikami wpływającymi na inwestycje lub na PKB). Gdy stopa procentowa stabilizuje się na pewnym poziomie, inwestycje na jednostkę PKB kolejny raz zaczynają maleć. W kolejnych okresach widzimy, że zmiana stopy procentowej już nie wpływa na inwestycje w stosunku do PKB. Przyczyną tego może być na przykład inflacja, która, jak ilustruje trajektoria stosunku inwestycji do PKB i inflacji, jest ujemnie zależna od tego stosunku inwestycji do PKB.

7. Nie ma czytelnej zależności między inflacją a nominalną stopą procentową (trajektoria 9).

8. Produkcja na jednostkę kapitału rośnie, gdy rośnie popyt na jednostkę kapitału (trajektoria 10) oraz gdy rośnie oczekiwany popyt (trajektoria 12).

Trzeba pamiętać o tym, że powyższe wnioski wynikają z analizy trajektorii jedynie wybranych par zmiennych przedstawionych na wykresach w przestrzeni fazowej. Dopiero analiza pozostałych par zmiennych dałaby pełniejszy obraz powiązań między nimi. Podobnie w rzeczywistej gospodarce na jedną wielkość ma wpływ wiele czynników. Wyciąganie wniosków z analizy zależności dwóch zmiennych daje pewną informację o funkcjonowaniu gospodarki, lecz należy zbadać pozostałe czynniki wpływające na analizowane zmienne, by prawidłowo ocenić badaną zależność.

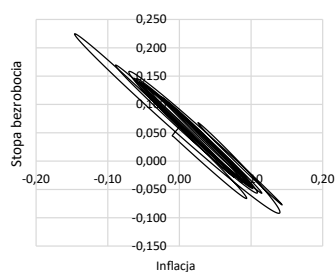
Na rysunku 4.5 przedstawiono trajektorie zmiennych modelu dla zestawu 4, dla którego stan stacjonarny gospodarki jest stabilny. Po okresie około $t = 900$ (około 75 lat) gospodarka cechuje się cyklicznością (cyklem koniunkturalnym), co jest



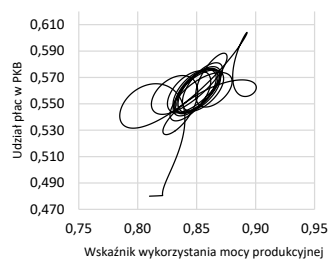
Rysunek 4.5. Dynamika zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej dla zestawu 4

Źródło: obliczenia własne.

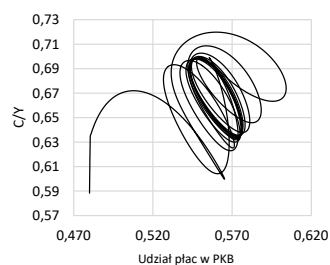
Trajektoria 1



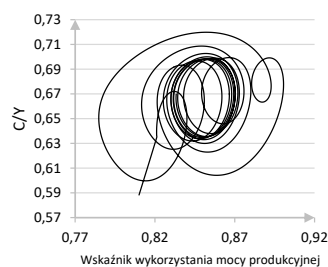
Trajektoria 2



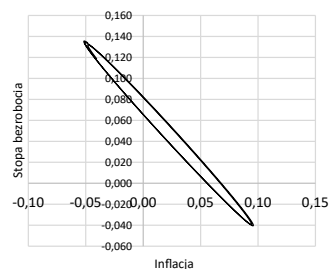
Trajektoria 3



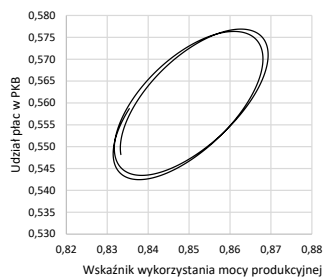
Trajektoria 4



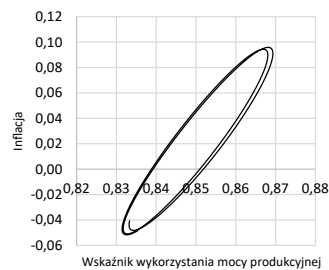
Trajektoria 5



Trajektoria 6



Trajektoria 7



Trajektoria 8



Rysunek 4.6. Trajektorie w przestrzeni fazowej otrzymane dla zestawu 4 wartości parametrów reakcji

Źródło: obliczenia własne.

charakterystyczne dla współczesnych gospodarek (Business Insider Polska, 2022). Długość jednego cyklu to około 400 okresów, czyli około 30 lat (cykl średni). Trajektorie wszystkich zmiennych modelu intensywnego (w przeliczeniu na jednostkę kapitału) po okresie $t = 900$ mają kształt podobny do sinusoidalnego. Oznacza to, że zmienne absolutne, tj. produkcja, konsumpcja, inwestycje itd., po około 75 latach rosną ze zmienną stopą wzrostu.

Z analizy różnic między wartościami parametrów reakcji (tabela 4.4) możemy wysunąć wniosek, że na zmianę stabilności stanu stacjonarnego wpłynął przede wszystkim wzrost wartości parametru reakcji β_{y^e} , czyli wzrost reakcji oczekiwanego popytu na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie. W zestawie 4, w porównaniu z zestawami 1–3, parametr ten ma dużo większą wartość, a wartości pozostałych parametrów są zbliżone do tych z zestawu 3. Wniosek ten jest zgodny z jednym z założeń o stabilności stanu stacjonarnego modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza, w którym zakłada się, że wartość parametru reakcji β_{y^e} jest odpowiednio mała. Z ekonomicznego punktu widzenia oznacza to, że zmiana stabilności następuje wówczas, gdy oczekiwania właścicieli firm dotyczące przyszłego popytu gwałtowniej reagują na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie.

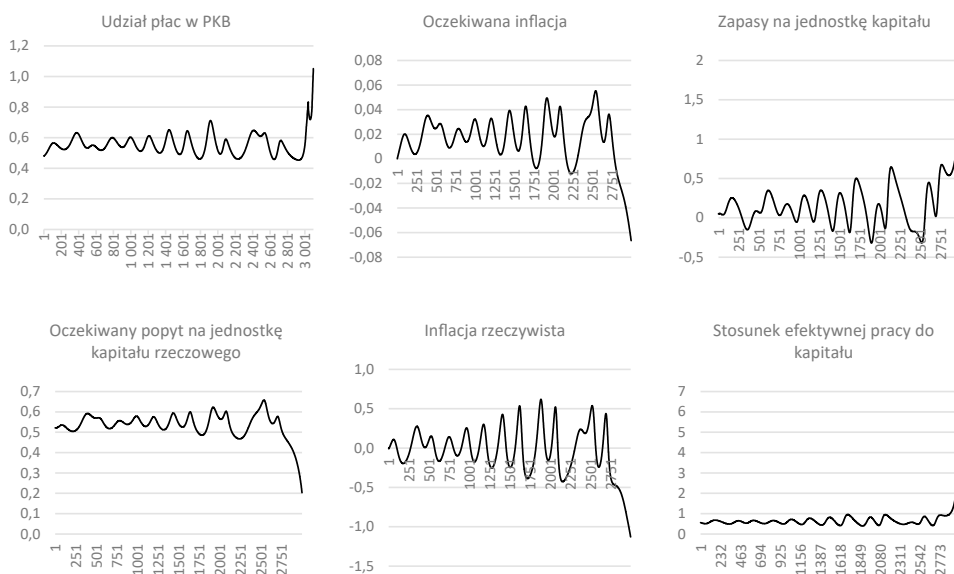
W niniejszej monografii głównie skupiono się na gospodarce, która po pewnym czasie będzie się rozwijała równomiernie, natomiast analizą pozostałych przypadków zajmiemy się w kolejnych pracach nad modelami typu KMG. Niemniej jednak, podobnie jak w wypadku symulacji modelu KMG dla zestawu 2 (rysunek 4.4), na rysunku 4.6, dla porównania, zaprezentowano kilka przykładowych trajektorii w przestrzeni fazowej dla zestawu 4. Nie poddano ich jednak szczegółowej analizie.

Na pierwszych czterech wykresach rysunku 4.6 przedstawiono trajektorie od czasu $t = 0$ (od stanu początkowego) do okresu $t = 3000$, czyli na przestrzeni 250 lat. Pozostałe cztery wykresy przedstawiają trajektorie w okresach od $t = 2500$ do $t = 2950$, czyli na przestrzeni około 37 lat.

Trajektorie 1–4 prawie od samego początku przybierają kształt podobny do elips, które wraz z upływem czasu przesuwają się wzdłuż osi układu współrzędnych. Ostateczne miejsce w układzie współrzędnych oraz kształt elipsy trajektorie zmiennych osiągają dopiero po około 2500 okresach (po około 200 latach). Badanie korelacji między zmiennymi przeprowadziliśmy osobno w dłuższym czasie (czyli od 0 do 3000 okresów) i w krótszym czasie (dla 2500–2950 okresów). W okresie od 2500 do 2950 okresów zależność można określić na podstawie nachylenia elipsy do osi odciętych oraz jej kształtu. Na przykład, trajektoria inflacji i stopy bezrobocia (trajektoria 5) ma kształt elipsy i jest nachylona ujemnie względem osi odciętych, co oznacza ujemną korelację między tymi zmiennymi. Ponadto elipsa ta jest bardzo płaska, co świadczy o silnej korelacji między tymi zmiennymi. W przypadku udziału płac w PKB i wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej (trajektoria 6) nachylenie ich trajektorii jest dodatnie, co wskazuje na dodatnią korelację między tymi zmiennymi. Trajektoria ta ma kształt elipsy, ale nie jest już tak płaska w po-

równaniu z trajektorią 5, więc korelacja nie jest tak mocna, jak w wypadku inflacji i stopy bezrobocia. W okresach od 0 do 3000 badanie zależności zmiennych nie w każdym przypadku jest takie proste jak w okresach od 2500 do 2950. Krzywe, choć przypominają elipsy, to zmieniają położenie i kształt, co często jest wynikiem dynamiki innych zmiennych (wyjątkiem jest np. trajektoria inflacji i stopy bezrobocia (trajektoria 1), która od samego początku wykazuje ujemną korelację między tymi zmiennymi). Zatem, aby zweryfikować dokładniej te zależności, należałoby przedstawić wszystkie kombinacje par zmiennych modelu, co zostawiamy na późniejsze prace nad modelem.

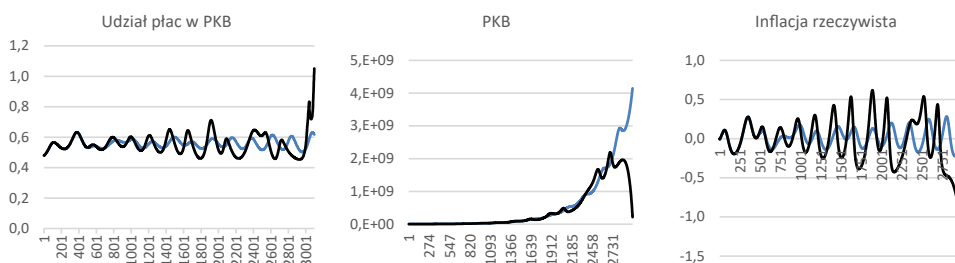
Na rysunku 4.7 przedstawiono trajektorie zmiennych modelu KMG, którego stan stacjonarny, uzyskany dla piątego zestawu wartości parametrów reakcji, jest niestabilny. Z postaci tych wykresów wynika, że model do pewnego okresu charakteryzuje się cyklem koniunkturalnym o różnej amplitudzie wahań. Po około $t = 200$ okresach (czyli po około 166 latach) następuje destabilizacja modelu i wartości zmiennych gwałtownie rosną lub maleją. Przyczyną destabilizacji modelu jest to, że oczekiwania dotyczące przyszłego popytu bardzo szybko reagują na błąd prognozy wielkości popytu w poprzednim okresie, co wyraża duża wartość parametru reakcji β_{y^e} . Reakcja ta jest szybsza niż w gospodarce opisanej zestawem 4 (wartości pozostałych parametrów reakcji są zbliżone do tych z zestawu 4), stąd wniosek o istotności parametru β_{y^e} dla stabilności stanu stacjonarnego gospodarki.



Rysunek 4.7. Dynamika zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej dla zestawu 5 (przypadek z brakiem stabilności)

Źródło: obliczenia własne.

Z przeprowadzonych przez nas badań (w postaci kolejnych symulacji) wynika, że jednym z rozwiązań problemu destabilizacji modelu (oprócz osłabienia reakcji oczekiwań dotyczących przyszłego popytu na błąd prognozy wielkości popytu w poprzednim okresie przez zmniejszenie wartości parametru reakcji β_{y^e}) jest zastosowanie odpowiedniej polityki fiskalnej lub pieniężnej. Na przykład zwiększenie po okresie około 30 lat o 2 p.p. składki τ_1 płaconej na ubezpieczenie społeczne przez pracodawców pozwoli całkowicie zahamować destabilizację modelu lub odsunąć ją w czasie (rysunek 4.8). Oznacza to, że zmiana wartości parametru oznaczającego stawkę podatkową zmienia dla modelu przedział wartości parametrów reakcji, m.in. parametru β_{y^e} , dla których stan stacjonarny gospodarki jest stabilny.

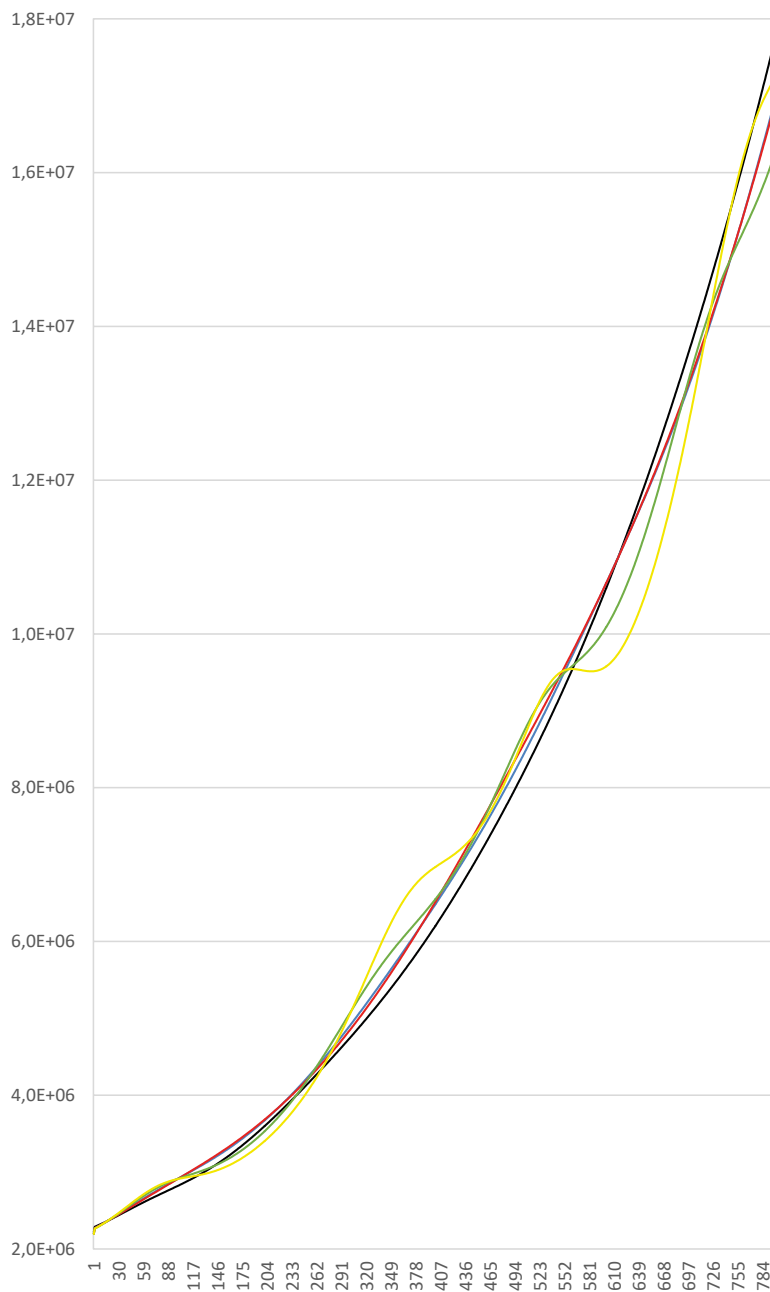


Rysunek 4.8. Dynamika przykładowych zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej dla zestawu 5 przy różnych stawkach podatkowych τ_1 , od $t = 400$. Wykres niebieski dla $\tau_1 = 0,09$, wykres czarny dla $\tau_1 = 0,07$

Źródło: obliczenia własne.

Na zakończenie, dla uporządkowania dotychczasowych obserwacji, na rysunku 4.9 przedstawiono porównanie wzrostu gospodarczego rozpatrywanego modelu we wszystkich pięciu scenariuszach na przykładzie wykresu funkcji produkcji (PKB). Na rysunku zaprezentowano wykresy trajektorii produkcji o krótszym horyzoncie czasu niż poprzednio analizowane. Porównywanie wzrostu produkcji na podstawie wykresów w długim horyzoncie czasowym nie jest możliwe, głównie z powodu wzrostu wykładniczego tej wielkości. Różnice między wykresami są zauważalne tylko na stosunkowo krótkich odcinkach czasu kilkunastu lat.

Dla zestawów parametrów 1–3 (wykresy niebieski, czerwony i czarny) na wykres PKB nakładają się powoli wygasające cykle koniunkturalne. W wypadku gospodarki opisaney zestawem 4 zauważalny jest stały cykl koniunkturalny przez cały badany okres (wykres zielony), a w wypadku gospodarki opisaney zestawem 5 rosnący cykl koniunkturalny (wykres żółty). Podsumowując, można powiedzieć, że we wszystkich analizowanych przypadkach gospodarki ze stanem stacjonarnym lokalnie asymptotycznie stabilnym (zestawy 1–3) wzrost gospodarczy w krótkim okresie jest podobny. W monografii największą uwagę poświęcono modelowi gospodarki z takim



Rysunek 4.9. Dynamika PKB. Trajektorie PKB dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji. Kolory krzywych oznaczają: kolor niebieski – zestaw 1, czerwony – zestaw 2, czarny – zestaw 3, zielony – zestaw 4, żółty – zestaw 5

Źródło: obliczenia własne.

właśnie stanem stacjonarnym. Z tego względu analizę polityki pieniężnej i fiskalnej w krótkim okresie, przedstawioną w kolejnym punkcie, przeprowadzono tylko dla jednego zestawu wartości parametrów reakcji – dla zestawu 1.

4.2.4. Analiza wpływu polityki fiskalnej i pieniężnej na gospodarkę

Polityka fiskalna

W omawianym modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza wprowadziliśmy, omówione w punkcie 4.1.1, autorskie modyfikacje, dzięki którym opis narzędzi polityki fiskalnej został rozszerzony o:

- stawki podatkowe, tj.: τ_w – stawka od dochodu z pracy najemnej, τ_c – stawka od zysku z kapitału trwałego i odsetek z posiadanych obligacji, τ_p – stawka podatku pośredniego, τ_1 – stawka składki ZUS płacona przez pracodawcę oraz τ_2 – stawka składki ZUS płacona przez pracownika;
- wydatki sektora finansów publicznych, których wysokość jest sterowana za pomocą parametrów: α_1 – stosunek transferów budżetowych do wynagrodzeń brutto pracowników najemnych, g – stosunek konsumpcji sektora publicznego do kapitału trwałego.

Uwaga 4.5. W rozpatrywanym modelu stawki τ_w oraz τ_2 występują w równaniach jako suma $\tau = \tau_w + \tau_2$, więc zmianę tych składek będziemy rozpatrywać jednocześnie jako zmianę stawki τ .

Przed rozpoczęciem analizy wpływu polityki fiskalnej wartości zmiennych w stanie stacjonarnym dla zmodyfikowanego modelu KMG (4.23)–(4.33), które dotąd były wyrażane na jednostkę kapitału trwałego, przedstawmy, podobnie jak w rozdziale drugim, w bardziej standardowej formie, czyli na jednostkę PKB⁴⁷:

- popyt w relacji do PKB: $\frac{Y^d}{Y} = \gamma$,
- udział płac w PKB: $\bar{U} = \frac{\gamma \bar{u} y^p - (n + \delta + g)}{(1 + \alpha_1 - \tau) \bar{u} y^p}$,
- stosunek długu sektora finansów publicznych do PKB:

$$\frac{B}{pY} = \frac{g - \tau_c (\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{u} y^p - \delta) - (\tau - \alpha_1) \bar{U} \bar{u} y^p}{(\alpha_3 \tau_c \bar{r} - \bar{\rho} + \xi + n) \bar{u} y^p},$$

⁴⁷ W większości dostępnych danych statystycznych wielkości są podawane na jednostkę PKB. Raczej nie spotyka się opracowań, w których wielkości podawane są na jednostkę kapitału trwałego.

- konsumpcja prywatna na jednostkę PKB: $\frac{C}{Y} = \frac{\gamma \bar{u} y^p - (n + \delta + g)}{\bar{u} y^p}$,
 - inwestycje prywatne na jednostkę PKB: $\frac{I}{Y} = \frac{n + \delta}{\bar{u} y^p}$,
- gdzie $\gamma = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n}$.

Dodatkowo w analizie polityki pieniężnej będziemy rozważać zachowanie następujących zmiennych:

- stopy inflacji: $\bar{\pi} = \mu - n$,
- zysku z kapitału trwałego: $\bar{\rho} = (1 - \tau_p) \gamma \bar{u} y^p - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{u} y^p - \delta$,
- nominalnej stopy procentowej: $\bar{r} = \bar{\rho} + \mu - n - \xi$.

Powyższe równania wyprowadziliśmy analogicznie do rozdziału drugiego.

Z powyższych równań wynika, że polityka fiskalna nie jest całkowicie neutralna w długim okresie. Dzieje się tak dlatego, że decyzje o wielkości konsumpcji publicznej g w stosunku do kapitału trwałego wpływają na wartość w stanie stacjonarnym zmiennej realnej, którą jest konsumpcja C/Y na jednostkę PKB. Natomiast pozostałe narzędzia polityki fiskalnej, tj. zmiana wysokości stawek podatkowych (polityka podatkowa) oraz zmiana wielkości transferów publicznych, nie wpływają na wartości zmiennych realnych w stanie stacjonarnym. Narzędzia te oddziałują natomiast na zmienne nominalne, tj. udział płac w PKB, obligacje w stosunku do kapitału trwałego, stopę inflacji, zysk z kapitału trwałego. W celu dokładniejszego zbadania wpływu polityki fiskalnej w długim okresie posłużono się metodami analitycznymi, tzn. obliczono pochodne funkcji określających wartość danej zmiennej w stanie stacjonarnym względem badanego parametru⁴⁸. Znaki wyznaczonych pochodnych przedstawiono w tabeli 4.9.

Tabela 4.9. Wpływ polityki fiskalnej na wartości zmiennych modelu KMG w stanie stacjonarnym

Zmienna	$g \uparrow$	$\tau \uparrow$	$\tau_c \uparrow$	$\tau_1 \uparrow$	$\tau_p \uparrow$	$\alpha_1 \uparrow$
$\omega L/Y$	–	+	0	0	0	–
Y^d/Y	0	0	0	0	0	0
C/Y	–	0	0	0	0	0
I/Y	0	0	0	0	0	0
B/pY	?	?	?	?	?	?
$\bar{\pi}$	0	0	0	0	0	0
$\bar{\rho}$	+	–	0	–	–	+

Źródło: obliczenia własne.

⁴⁸ Sposób wyznaczania pochodnych został przedstawiony w rozdziale pierwszym.

Wartości wyznaczonych pochodnych potwierdzają neutralność polityki fiskalnej w zakresie zmian wysokości stawek podatkowych i transferów publicznych oraz brak całkowitej neutralności polityki fiskalnej w zakresie wydatków na konsumpcję publiczną. Symbol (+) oznacza wzrost wartości zmiennej, gdy rośnie wartość danego parametru, symbol (–) spadek wartości zmiennej, znak (?) oznacza, że na podstawie wzoru pochodnej nie można ustalić jej znaku. Przyczyną tego jest albo złożony wzór tej pochodnej, albo zależność znaku pochodnej od pozostałych wartości parametrów modelu. Z tabeli 4.9 wynika, że nie można ustalić znaku pochodnej jedynie w wypadku zmiennej B/pY . Żeby go wyznaczyć, skorzystano z jednej z metod ilościowych, którą jest symulacja komputerowa dla konkretnych danych. Wyniki tej analizy zaprezentowano poniżej.

Analizę polityki fiskalnej przeprowadzamy na podstawie symulacji, w których przyjęliśmy bazowy zestaw wartości parametrów z tabeli 4.2, wartości początkowe zmiennych z tabeli 4.5 oraz pierwszy zestaw wartości parametrów reakcji z tabeli 4.3. Głównym celem przeprowadzenia tych symulacji było sprawdzenie wpływu polityki fiskalnej na wzrost gospodarczy w krótkim okresie oraz na wartość zmiennej B/pY w stanie stacjonarnym. Za krótki okres przyjmujemy horyzont 10 lat.

Badanie polityki fiskalnej ograniczono tylko do tych wartości parametrów, przy których stan stacjonarny jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilny. Z tego powodu przed przystąpieniem do tej analizy wyznaczono przedział wartości każdego badanego parametru, przy którym ta własność stanu stacjonarnego jest spełniona.

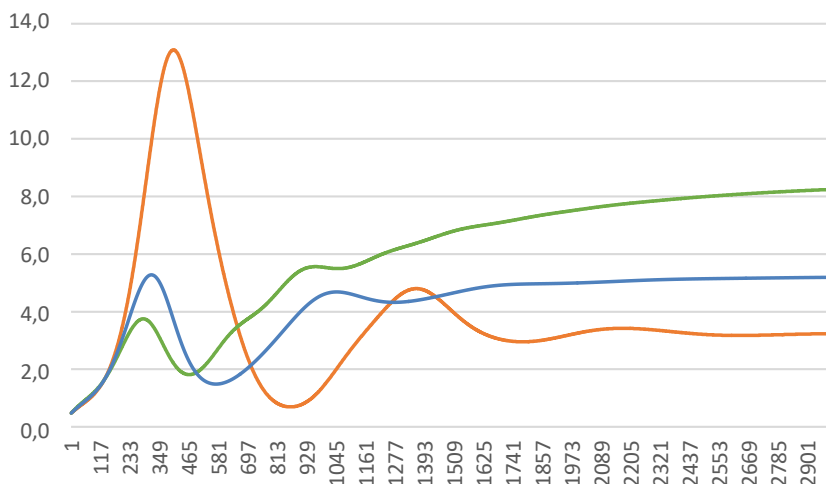
Zmiana stawki podatku od dochodu z pracy najemnej τ_w i stawki na ubezpieczenie społeczne płacone przez pracowników τ_2

W pierwszej kolejności empirycznie sprawdzono wpływ zmiany stawki podatkowej $\tau = \tau_w + \tau_2$ na stabilność stanu stacjonarnego. Ustalono, że stan stacjonarny jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilny dla $\tau \in (0,15, 0,27)$. Z tabeli 4.9 można odczytać, że wzrost stawki podatku τ zwiększa udział płac w PKB oraz zmniejsza stopę zysku z kapitału trwałego. Natomiast na podstawie wzoru pochodnej nie da się określić, w jaki sposób zmiana stawki τ wpływa na stosunek długu sektora finansów publicznego do PKB. Żeby to ustalić, wykonano symulacje tej zmiennej przy trzech różnych wartościach stawki podatkowej, które przedstawiono na rysunku 4.10.

Mniejsza wartość stawki τ (wykres zielony w porównaniu z niebieskim) oznacza większe zadłużenie sektora finansów publicznych w stanie stacjonarnym, natomiast jej większa wartość pociąga za sobą mniejsze zadłużenie (wykres pomarańczowy).

W kolejnym kroku zbadaliśmy wpływ zmiany stawki τ na wzrost gospodarczy w krótkim okresie. Wpływ ten przedstawiono na rysunku 4.11.

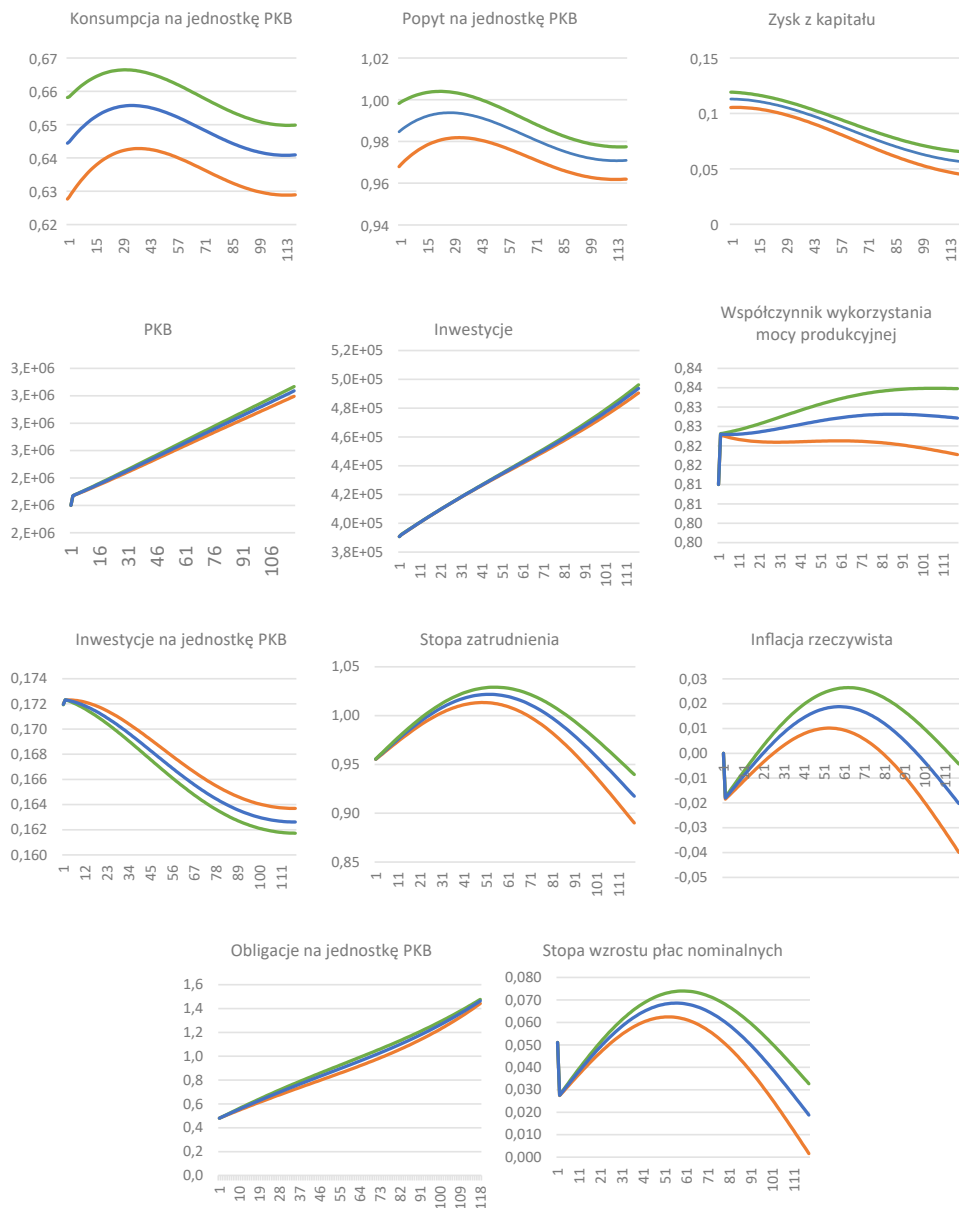
Pierwszym wnioskiem płynącym z wyników symulacji przedstawionych na rysunku 4.11 jest brak neutralności w krótkim okresie zmiennych modelu KMG wobec zmiany stawki τ . Wynika to przede wszystkim z założenia modelu, że



Rysunek 4.10. Dynamika długu sektora finansów publicznych w stosunku do PKB dla różnych wartości stawki podatkowej τ będącej sumą stawki podatkowej od dochodu z pracy τ_w i stawki ubezpieczenia zdrowotnego płaconego przez pracowników τ_z . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: pomarańczowy dla $\tau = 26\%$, zielony dla $\tau = 20\%$, niebieski dla $\tau = 22,7\%$ (zestaw 1 – bazowy)

Źródło: obliczenia własne.

pracownicy najemni cały swój dochód do dyspozycji przeznaczają na konsumpcję prywatną C . Mniejsza stawka podatku τ oznacza większą konsumpcję prywatną, a w konsekwencji większy stosunek konsumpcji prywatnej do PKB C/Y (wykresy zielone w porównaniu z wykresami niebieskimi). Większa konsumpcja prywatna pociąga za sobą również większy popyt, a więc większą stopę zysku ze sprzedaży. W modelu wzrost popytu wpływa na wzrost oczekiwanego popytu, a w konsekwencji na wzrost wielkości produkcji. Wzrost produkcji bezpośrednio wpływa na wzrost współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej oraz stopę zatrudnienia. Stopa zatrudnienia rośnie, gdy wydajność pracy rośnie wolniej niż produkcja. Wzrost stopy zatrudnienia wpływa na wzrost nominalnej stawki wynagrodzeń, a wzrost współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej na wzrost inflacji. Przez około trzy lata stosunek konsumpcji do produkcji rośnie (w każdym z przedstawionych na rysunku 4.10 scenariuszy wysokości stawki podatku), a to oznacza, że w okresie tym konsumpcja rośnie szybciej niż produkcja. Ta sytuacja zmienia się po trzech latach – produkcja rośnie szybciej niż konsumpcja prywatna. Wynika to ze zmniejszenia stopy zatrudnienia wskutek wzrostu wydajności pracy, która rośnie ze stałą stopą wzrostu. Z wykresów przedstawiających inwestycje w stosunku do PKB oraz trajektorie inwestycji możemy wywnioskować brak większego wpływu zmiany stawki τ na stopę wzrostu inwestycji. Negatywną konsekwencją zmniejszenia staw-



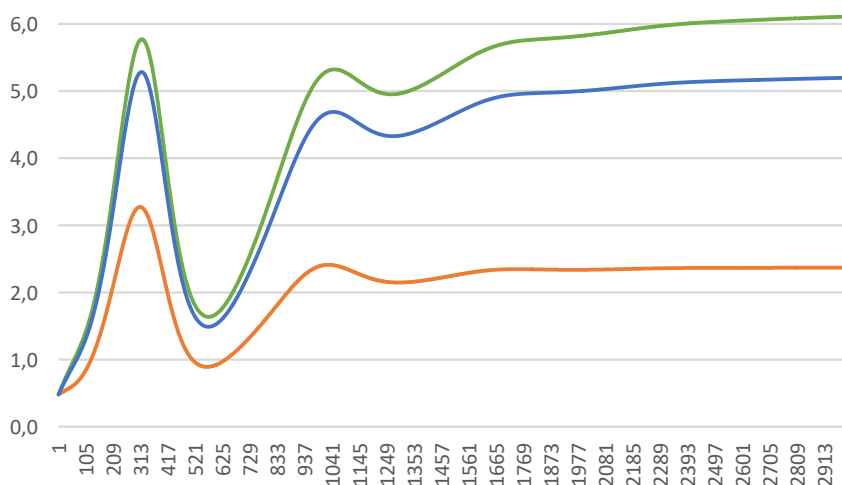
Rysunek 4.11. Dynamika wybranych zmiennych modelu KMG dla różnych stawek podatkowych τ . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: pomarańczowe dla $\tau = 0,26$, zielone dla $\tau = 0,2$, niebieskie dla $\tau = 0,227$ (zestaw 1 – bazowy)

Źródło: obliczenia własne.

ki τ jest zwiększenie stopy wzrostu zadłużenia sektora finansów publicznych. Większa wartość stawki τ (wykresy pomarańczowe) oznacza mniejszą konsumpcję prywatną. Konsekwencją zmniejszenia konsumpcji prywatnej jest mniejszy poziom produkcji. Pozytywnym skutkiem wzrostu stawki τ jest niższa stopa wzrostu zadłużenia sektora finansów publicznych.

Zmiana stawki podatku od zysku z kapitału trwałego i odsetek z obligacji τ_c

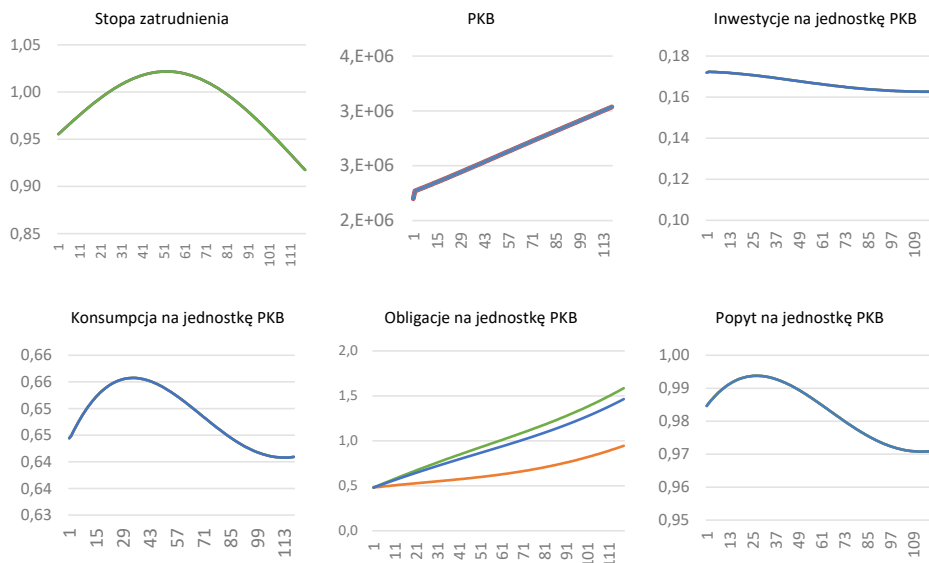
Analiza empiryczna wykazała, że stan stacjonarny jest stabilny dla wartości parametru τ_c większej od -1 . Z tabeli 4.9 wynika, że jedynym efektem zmiany stawki podatku τ_c w długim okresie jest zmiana wielkości długu sektora finansów publicznych w stosunku do PKB w stanie stacjonarnym. Na podstawie analizy empirycznej, której wyniki przedstawiono na rysunku 4.12, możemy stwierdzić, że większa wysokość stawki podatku τ_c oznacza mniejszą wartość w stanie stacjonarnym długu publicznego w stosunku do PKB, a mniejsza wysokość stawki pociąga za sobą większe zadłużenie.



Rysunek 4.12. Dynamika długu sektora finansów publicznych w stosunku do PKB dla różnych wartości stawki podatkowej τ_c . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: pomarańczowy dla $\tau_c = 0,4$, zielony $\tau_c = 0,1$, niebieski dla $\tau_c = 0,082$ (zestaw 1 – bazowy)

Źródło: obliczenia własne.

Z kolei na rysunku 4.13 zaprezentowano wyniki analizy zmiany stawki podatkowej τ_c na podstawie kilku wybranych zmiennych modelu. Analiza dotyczy krótkiego okresu. Wnioskujemy z niej, że zmiana wysokości stawki τ_c nie wpływa na



Rysunek 4.13. Dynamika zmiennych modelu KMG dla różnych stawek podatkowych τ_c . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: pomarańczowe dla $\tau_c = 0,4$, zielone dla $\tau_c = 0,1$, niebieskie dla $\tau_c = 0,082$ (zestaw 1 – bazowy)

Źródło: obliczenia własne.

trajektorie badanych zmiennych. Wyjątkiem jest zmienna obligacje na jednostkę PKB, która, podobnie jak w długim okresie, rośnie szybciej przy mniejszej wysokości stawki podatkowej τ_c ⁴⁹.

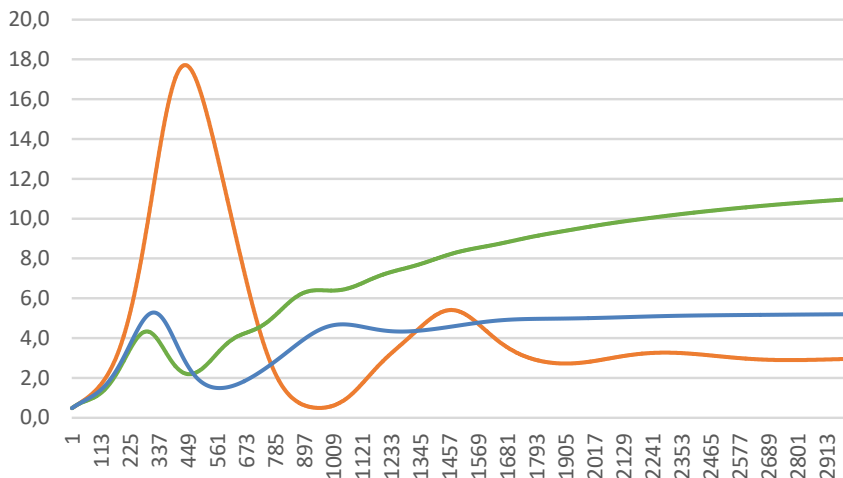
Zmiana stawki podatków pośrednich τ_p

Zmianę stawki podatków pośrednich (np. zmianę stawki VAT lub stawki podatku akcyzowego) symulujemy zmianą wartości parametru τ_p (stosunek podatku pośredniego do całkowitej sprzedaży). Na podstawie analizy empirycznej możemy stwierdzić, że stan stacjonarny modelu KMG jest lokalnie asymptotycznie stabilny dla $\tau_p \in (0,11, 0,17)$.

Z wykresów przedstawionych na rysunku 4.14. wynika intuicyjny wniosek, że niższa stawka podatku pośredniego oznacza większe zadłużenie sektora finansów publicznych w stosunku do PKB.

Na rysunku 4.15 przedstawiono analizę wpływu wysokości podatku pośredniego w okresie 10 lat (120 okresów) na wybrane zmienne modelu.

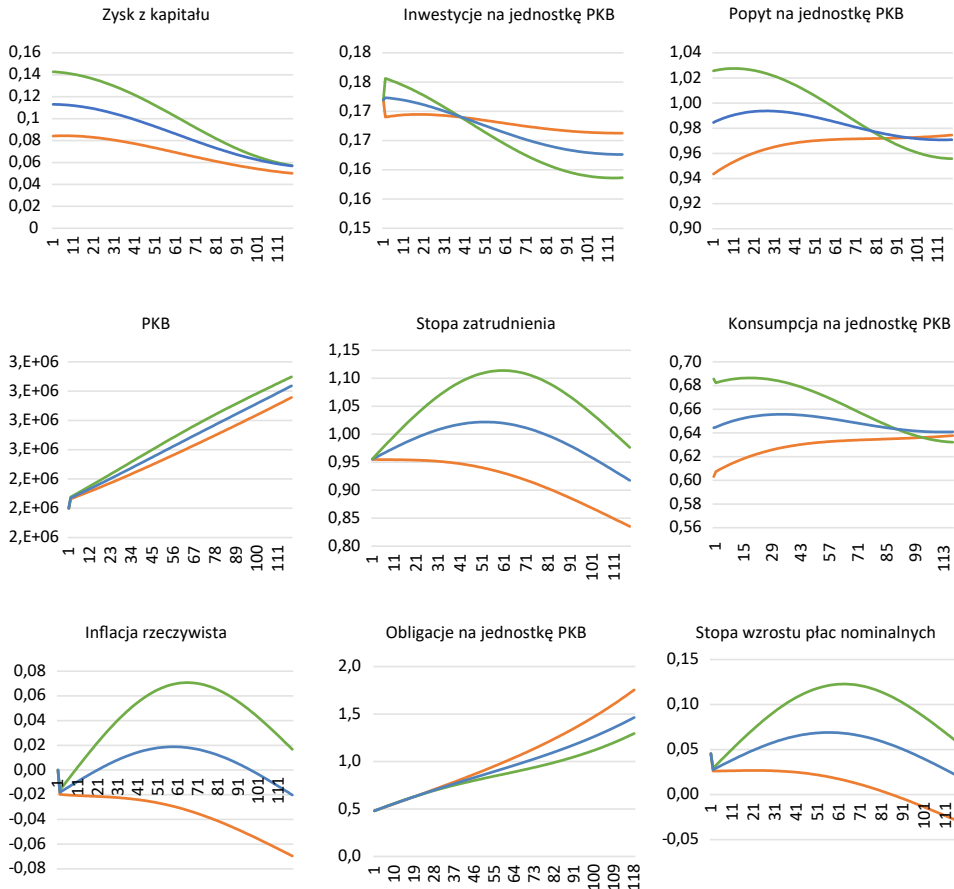
⁴⁹ Do podobnego wniosku doszli Gechert i Heimberger (2022).



Rysunek 4.14. Dynamika długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB dla różnych stawek podatku pośredniego τ_p . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: zielony dla $\tau_p = 0,17$, pomarańczowy dla $\tau_p = 0,13$, niebieski dla $\tau_p = 0,15$ (zestaw 1 – bazowy)

Źródło: obliczenia własne.

Obniżenie podatku pośredniego pozwala uzyskać wyższą stopę zysku z kapitału rzeczowego, a to z kolei pociąga za sobą większy popyt inwestycyjny (rysunek 4.15). Większy popyt oznacza większy poziom produkcji, czego konsekwencją jest wyższy wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnej oraz wyższa stopa zatrudnienia. Te dwa czynniki wpływają na podniesienie poziomu cen i płac nominalnych. Wyższe poziomy płac i zatrudnienia oznaczają większy poziom konsumpcji prywatnej. Stopa wzrostu produkcji utrzymuje się w badanym okresie na stałym poziomie. Ze względu na większe płace nominalne większa jest stopa zysku z kapitału trwałego, a w konsekwencji mniejsze popyt inwestycyjny oraz stopa wzrostu produkcji. Po około sześciu latach zatrudnienie zaczyna maleć w wyniku zwiększenia wydajności pracy oraz zmniejszenia stopy wzrostu produkcji. Ważnym wynikiem jest także mniejszy dług sektora finansów publicznych w stosunku do PKB, co przede wszystkim wynika ze wzrostu produkcji. Dodatkowo na podstawie wyników symulacji przedstawionych za pomocą wykresów można wywnioskować, że zmniejszanie stawki podatku pośredniego powoduje szybszy wzrost produkcji w porównaniu z innymi wielkościami, tj. z konsumpcją prywatną oraz z inwestycjami prywatnymi, co ilustrują zmienne C/Y i I/Y , opisujące stosunek konsumpcji do PKB oraz stosunek inwestycji do PKB. Negatywnym skutkiem obniżenia podatku pośredniego jest szybszy wzrost cen.



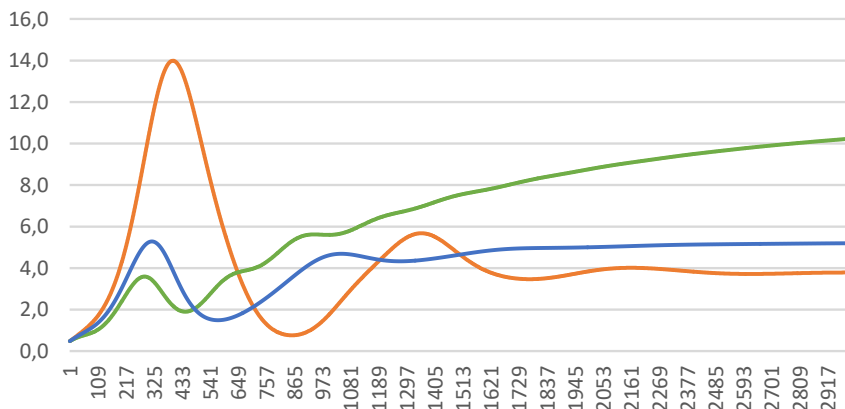
Rysunek 4.15. Dynamika zmiennych modelu KMG dla różnych stawek podatku pośredniego τ_p . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla $\tau_p = 0,17$, pomarańczowe dla $\tau_p = 0,13$, niebieskie dla $\tau_p = 0,15$ (zestaw 1 – bazowy)

Źródło: obliczenia własne.

Zmiana stawki ubezpieczenia społecznego płaconego przez pracodawców τ_1

Analiza empiryczna wykazała, że stan stacjonarny jest stabilny dla stawki $\tau_1 \in (0,00, 0,11)$. Z wykresów przedstawionych na rysunku 4.16 wynika, że zwiększanie stawki τ_1 powoduje zmniejszenie wartości długu sektora finansów publicznych w stosunku do PKB.

Zmiana stawki τ_1 powoduje takie same reakcje modelu jak zmiana stawki podatku pośredniego (porównaj wykresy na rysunku 4.17 z wykresami na rysunku 4.15). Wynika to z równań modelu, w których podatek pośredni i podatek na ubez-



Rysunek 4.16. Dynamika długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB dla różnych stawek τ_1 ubezpieczenia społecznego płaconego przez pracodawców. Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: zielony dla $\tau_1 = 0,04$ (spadek o 0,03), pomarańczowy dla $\tau_1 = 0,1$ (wzrost o 0,03), niebieski dla $\tau_1 = 0,07$ (zestaw 1 – bazowy)

Źródło: obliczenia własne.

pieczenia społeczne płacone przez pracodawców jest uwzględniony w oczekiwanych zyskach przedsiębiorstw.

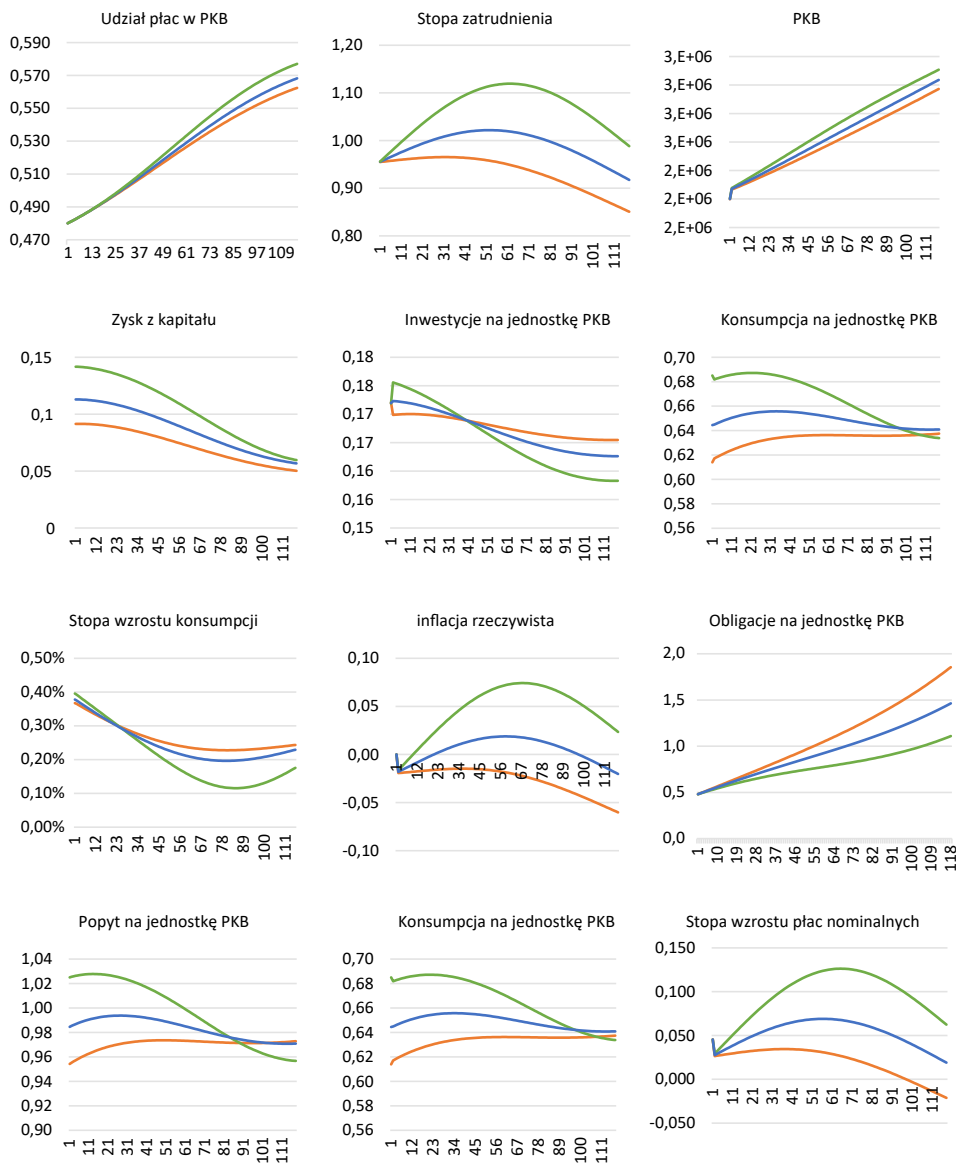
Zmiana wydatków sektora rządowego g

Z przeprowadzonych analiz wynika, że stan stacjonarny jest stabilny dla $g \in (0,075, 0,115)$. Mniejsze wydatki rządu przeznaczone na konsumpcję publiczną oznaczają mniejszy dług sektora finansów publicznych w stosunku do PKB w stanie stacjonarnym (rysunek 4.18).

Przejdźmy teraz do badania wpływu wysokości wydatków publicznych w krótkim okresie na wzrost gospodarczy.

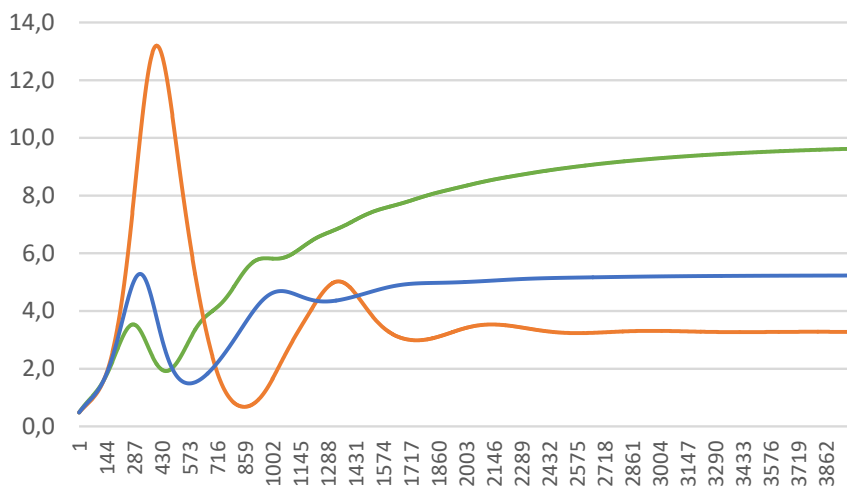
W krótkim okresie wysokość wydatków publicznych wpływa na popyt, a przez to na wielkość produkcji. Większa wielkość produkcji przekłada się na współczynnik wykorzystania mocy produkcyjnej oraz na stopę zatrudnienia, co oznacza wyższe ceny i wynagrodzenia za pracę. Oznacza to też, że wysokość wydatków rządowych na konsumpcję publiczną ma analogiczny wpływ na wzrost gospodarczy jak wysokość stawki podatku od dochodu z pracy najemnej (rysunki 4.17 i 4.19).

Podsumowując, możemy stwierdzić, że z przeprowadzonej analizy polityki fiskalnej wynika, że odpowiednie korzystanie z jej narzędzi może prowadzić do szybszego wzrostu gospodarczego jedynie w krótkim okresie. Z drugiej strony nieodpowiednia polityka fiskalna skutkuje większym zadłużeniem gospodarki zarówno w krótkim, jak i w długim okresie. Kolejnym krokiem badania polityki fiskalnej może być analiza zmian kilku stawek podatkowych jednocześnie oraz porównanie wyników dotyczących różnych scenariuszy prowadzenia polityki fi-



Rysunek 4.17. Dynamika zmiennych modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza dla różnych stawek τ_1 ubezpieczenia społecznego płaconego przez pracodawców. Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla $\tau_1 = 0,04$ (spadek o 0,03), pomarańczowe dla $\tau_1 = 0,1$ (wzrost o 0,03), niebieskie dla $\tau_1 = 0,07$ (zestaw 1 – bazowy)

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 4.18. Dynamika długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB w zależności od poziomu wydatków rządu g . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: zielony dla $g = 0,08$ (spadek o 0,01), pomarańczowy dla $g = 0,1$ (wzrost o 0,01), niebieski dla $g = 0,09$ (zestaw 1 – bazowy)

Źródło: obliczenia własne.

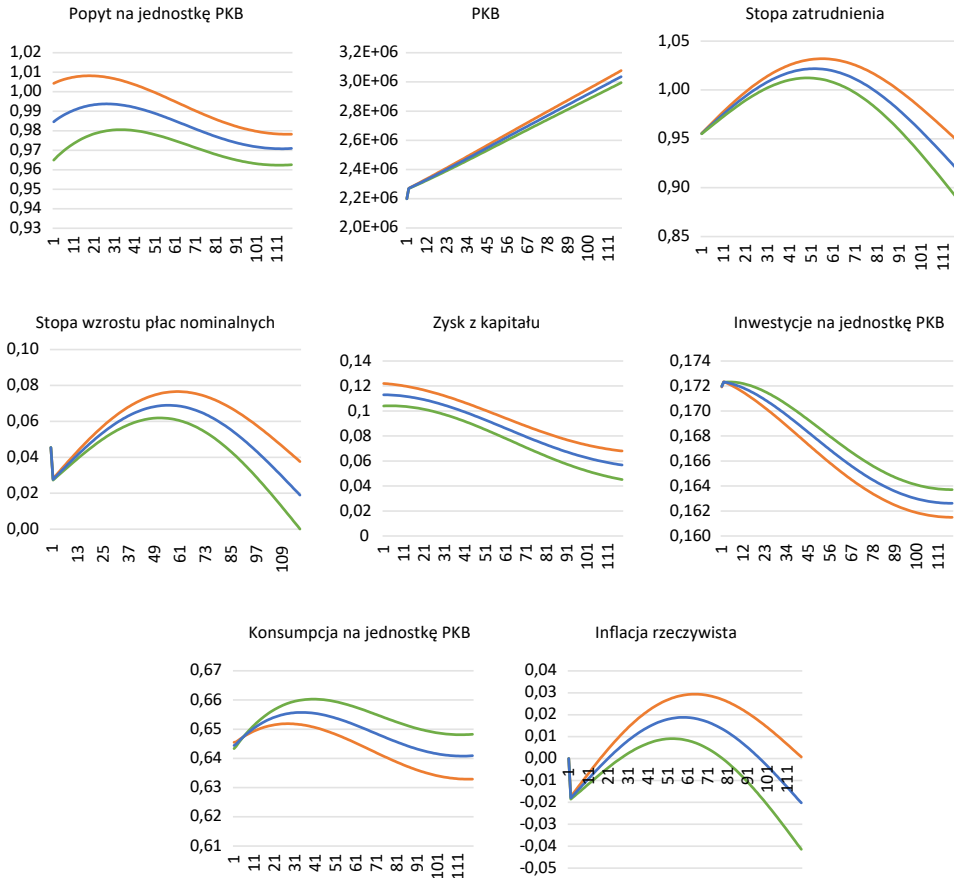
skalnej w wypadku gospodarki opisanej innym zestawem parametrów reakcji. Jednakże tę analizę zostawiamy jako przedmiot badań nad modelami typu KMG w kolejnych pracach.

Polityka pieniężna

Zmiana stopy wzrostu podaży pieniądza μ

W omawianym modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza jedynym narzędziem polityki pieniężnej jest stopa wzrostu podaży pieniądza μ . Z analizy równań zmiennych w stanie stacjonarnym wynika, że polityka pieniężna jest neutralna w długim okresie (parametr μ nie wpływa na zmienne realne w stanie stacjonarnym). Wyjątkiem są zmienne nominalne, tj. stopa inflacji i dług sektora finansów publicznych. Z równania stopy inflacji w stanie stacjonarnym ($\bar{\pi} = \mu - n$), bez obliczania pochodnej, łatwo można wywnioskować, że stopa inflacji rośnie w stanie stacjonarnym wraz ze wzrostem wartości parametru μ .

Bardziej skomplikowane jest określenie reakcji na zmianę polityki pieniężnej (zmianę wartości parametru μ) długu sektora finansów publicznych w stosunku do PKB w stanie stacjonarnym. Żeby to zrobić, wyznaczyliśmy pochodną tej zmiennej względem parametru μ :



Rysunek 4.19. Dynamika zmiennych modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza w zależności od poziomu wydatków rządu g . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla $g = 0,08$ (spadek o $0,01$), pomarańczowe dla $g = 0,1$ (wzrost o $0,01$), niebieskie dla $g = 0,09$ (zestaw 1 – bazowy)

Źródło: obliczenia własne.

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{- \left(g - \tau_c \left(\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{u} y^p - \delta \right) - (\tau - \alpha_1) \bar{U} \bar{u} y^p \right) \alpha_3 \tau_c}{(\alpha_3 \tau_c \bar{r} - \bar{\rho} + \xi + n)^2 \bar{u} y^p}.$$

Z tego wzoru wynika, że wpływ polityki pieniężnej na dług sektora finansów publicznych w stosunku do PKB zależy od parametrów modelu. Pochodna ta jest dodatnia:

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{B}{pY} \right) > 0,$$

gdy

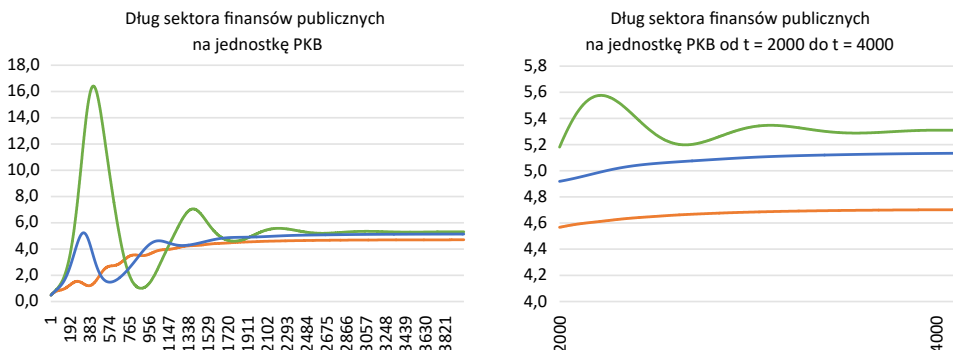
$$-\left(g - \tau_c \left(\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{u} y^p - \delta \right) - (\tau - \alpha_1) \bar{U} \bar{u} y^p \right) \alpha_3 \tau_c > 0,$$

czyli gdy

$$g + \alpha_1 \bar{U} \bar{u} y^p < \tau_c \left(\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{u} y^p - \delta \right) + \tau \bar{U} \bar{u} y^p.$$

Zatem, jeżeli wydatki sektora finansów publicznych są mniejsze od jego dochodów, to na skutek zwiększenia stopy wzrostu podaży pieniądza dług sektora finansów publicznych w stosunku do PKB rośnie w długim okresie.

Na rysunku 4.20 przedstawiono trajektorie sektora finansów publicznych w stosunku do PKB dla trzech różnych stóp wzrostu podaży pieniądza.

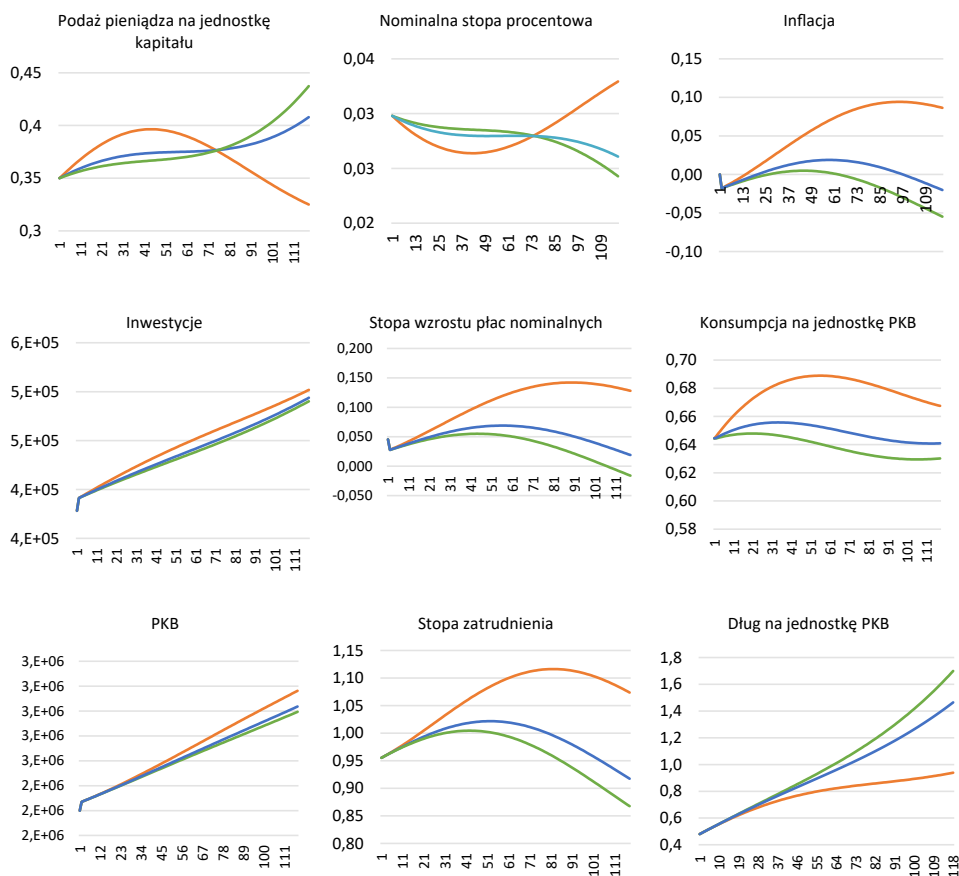


Rysunek 4.20. Dynamika długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB dla różnych wartości stopy wzrostu μ . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: zielone dla $\mu = 0,04$ (spadek o 0,01), pomarańczowe dla $\mu = 0,08$ (wzrost o 0,03), niebieskie dla $\mu = 0,05$ (zestaw 1 – bazowy)

Źródło: obliczenia własne.

Z kolei analiza empiryczna wykonana dla pierwszego zestawu parametrów reakcji wykazała, że wartość długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB osiąga niższą wartość w stanie stacjonarnym, gdy parametr μ (stopa wzrostu podaży pieniądza) ma większą wartość (rysunek 4.21).

W kolejnym kroku analizy skupimy się na badaniu polityki pieniężnej w krótkim okresie. Do symulacji komputerowych użyliśmy takiego samego zestawu wartości parametrów jak w analizie polityki fiskalnej. Na pierwszym etapie analizy skutków polityki pieniężnej sprawdziliśmy wpływ stopy wzrostu podaży pieniądza na stabilność stanu stacjonarnego. Okazało się, że stan stacjonarny jest lokalnie asymptotycznie stabilny dla $\mu > 0,035$. Zatem zbyt niski poziom wzrostu podaży



Rysunek 4.21. Dynamika zmiennych modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza dla różnych stóp wzrostu μ . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla $\mu = 0,04$ (spadek o 0,01), pomarańczowe dla $\mu = 0,08$ (wzrost o 0,03), niebieskie dla $\mu = 0,05$ (zestaw 1 – bazowy)

Źródło: obliczenia własne.

pieniądza prowadzi do destabilizacji gospodarki. Symulacje wykonano dla trzech różnych wartości parametru μ , a prezentację wykresów trajektorii ograniczono do 120 okresów (10 lat).

Z równań modelu wynika, że zwiększenie stopy wzrostu podaży pieniądza μ w pierwszej kolejności przyspiesza wzrost podaży pieniądza na jednostkę kapitału rzeczowego, co prowadzi do zmniejszenia nominalnej stopy procentowej. Jednocześnie rośnie cel inflacyjny, co wpływa na wzrost stopy inflacji i w konsekwencji na wzrost płac nominalnych. Rosnąca stopa inflacji oraz malejąca nominalna stopa procentowa prowadzą do wzrostu popytu inwestycyjnego. Wzrost płac nominalnych powoduje wzrost konsumpcji prywatnej. Wzrost konsumpcji i inwestycji

skutkują zwiększeniem produkcji. Odpowiednio wysoki wzrost produkcji wpływa na wzrost stopy zatrudnienia⁵⁰ oraz współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej. Wzrost stopy zatrudnienia powoduje wzrost płac nominalnych, a wzrost współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej skutkuje wzrostem cen. Ten cykl powtarza się do momentu aż wydajność pracy i kapitał trwały zwiększą się do odpowiedniego poziomu, czego skutkiem będzie zmniejszenie stopy zatrudnienia i stopy wzrostu płac nominalnych oraz zmniejszenie podaży pieniądza na jednostkę kapitału, czyli wzrost nominalnej stopy procentowej.

4.2.5. Podsumowanie

Wyniki symulacji komputerowych dla różnych zestawów wartości parametrów, przeprowadzonych na podstawie modelu KMG w postaci intensywnej przedstawionego w rozdziale pierwszym w pełni potwierdziły prawdziwość twierdzenia o lokalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego. Ponadto symulacje odkryły znaczące mankamenty modelu, którymi są długi czas dochodzenia gospodarki do stanu stacjonarnego oraz trudności w kalibracji modelu do danych dotyczących rzeczywistej gospodarki.

Analiza empiryczna pokazała, że czas dojścia do stanu stacjonarnego może zostać skrócony przez zmianę wartości odpowiednich parametrów. Może to oznaczać, że wpływ na długi czas dochodzenia do stanu stacjonarnego ma złożoność modelu, duża liczba jego równań i zmiennych, a także nieliniowość zależności między zmiennymi. Jednakże zmiany wartości parametrów prowadzą do mniejszego realizmu w interpretacji wartości zmiennych oraz parametrów modelu, a w konsekwencji do odejścia od symulacji polskiej gospodarki. Z tego powodu w tej pracy nie przedstawiamy takich symulacji⁵¹. Oprócz czasu dojścia gospodarki do ścieżki równomiernego wzrostu ważną informacją jest kierunek rozwoju gospodarki, który został zbadany w symulacjach. Analizując wykresy, zauważono, że na ten kierunek mają wpływ wartości parametrów modelu, które odzwierciedlają działania sektorów gospodarczych.

W kolejnym podrozdziale na podstawie symulacji komputerowych porównano model KMG z modelem KMG_T. Ponadto sprawdzono, jak zmiana polityki pieniężnej wpływa na wzrost gospodarczy w modelu KMG_T.

⁵⁰ Zatrudnienie rośnie, gdy stopa wzrostu produkcji jest wyższa niż stopa wzrostu wydajności pracy.

⁵¹ We wcześniejszych pracach analiza empiryczna koncentrowała się na badaniu cyklicznego wzrostu (Chiarella i in., 2000). Autorzy tych prac nie zajmują się czasem dojścia do stanu stacjonarnego.

4.3. Eksperymenty symulacyjne modelu KMG z regułą Taylora

W niniejszym podrozdziale przedstawiono wyniki eksperymentów symulacyjnych modelu KMG z regułą Taylora (KMGT). Analiza koncentruje się na porównaniu dynamiki kluczowych zmiennych oraz stabilności stanu stacjonarnego z wynikami uzyskanymi dla modelu KMG omówionego we wcześniejszym podrozdziale. Dodatkowo zbadano wpływ polityki pieniężnej i fiskalnej na zachowanie modelu KMGT.

4.3.1. Uwagi ogólne

W podrozdziale tym zaprezentowano symulacje komputerowe modelu KMG z regułą Taylora bez kredytu inwestycyjnego. Powodem takiego ograniczenia jest konieczność ponownej kalibracji równań modelu oraz wyznaczenie parametrów modelu, co znacznie zwiększa objętość pracy. Analiza empiryczna modelu KMG z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym zostanie przeprowadzona w przyszłości w kolejnych pracach autora niniejszej monografii.

W celu zilustrowania dynamiki modelu KMG z regułą Taylora (KMGT) przedstawimy wyniki prostych symulacji komputerowych. Podobnie jak poprzednim punkcie, równania modelu KMGT zostały zmodyfikowane w celu dostosowania ich do danych o polskiej gospodarce. Wszystkie zastosowane modyfikacje są takie same jak dla modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza. Z tego powodu przedstawimy jedynie końcowe postacie równań zmodyfikowanego modelu KMGT (tabela 4.10).

Tabela 4.10. Równania modelu KMG z regułą Taylora w symulacjach komputerowych

Lp.	Nazwa zmiennej	Równanie
Determinanty popytu		
1	Popyt na produkt	$Y^d = C + I + G$
2	Konsumpcja sektora prywatnego	$C = (1 - \tau)\omega L^d + TR$, gdzie $TR = \alpha_1 \omega L^d$
3	Popyt na pracę	$L^d = Y/x$
4	Stopa wzrostu wydajności pracy	$\hat{x} = n$
5	Stopa wzrostu płac nominalnych	$\hat{w} = \beta_w (V - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^e + n$
6	Stopa wzrostu cen	$\hat{p} = \beta_p (u - \bar{u}) + \kappa_p (\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p) \pi^e$
7	Przyrost oczekiwanej inflacji	$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \bar{\pi} - \pi^e)$
8	Stopa zatrudnienia	$V = L^d / L$

cd. tabeli 4.10

Lp.	Nazwa zmiennej	Równanie
9	Wskaźnik wykorzystania potencjału produkcyjnego	$u = Y/Y^p$
10	Produkcja potencjalna	$Y^p = y^p K$
11	Przyrost kapitału	$\dot{K} = i_1 (\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) K + i_2 (u - \bar{u}) K + \hat{Y}^e K$
12	Oczekiwana realna stopa zysku z kapitału	$\rho^e = ((1 - \tau_p) Y^e - (1 + \tau_1) \omega L^d - \delta K) / K$
13	Stopa wzrostu oczekiwanej sprzedaży	$\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{y^e} (Y^d - Y^e) / Y^e$
14	Popyt inwestycyjny	$I = \dot{K} + \delta K$
Produkcja i zapasy		
15	Produkcja	$Y = Y^e + \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N)$
16	Produkcja przeznaczona na zapasy	$Z = \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N)$
17	Pożądany poziom zapasów	$N^d = \beta_{N^d} Y^e$
18	Zmiana rzeczywistego poziomu zapasów	$\dot{N} = Y - Y^d$
Reguła Taylora		
19	Przyrost nominalnej stopy procentowej	$\dot{r} = -\beta_r (r - r^o) + \beta_p (\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_u (u - \bar{u})$
Budżet państwa		
20	Podatki	$T = \tau \omega L^d + \tau_c (\alpha_4 Y^d - (1 + \tau_1) \omega L^d - \delta K + \alpha_3 r B / p)$
21	Popyt sektora rządowego	$G = gK$
22	Przyrost wartości obligacji	$\dot{B} = pG + pTR + rB - pT$

Model KMG z regułą Taylora w postaci intensywnej

Wykorzystując powyższe równania modelu KMG z regułą Taylora, wersję modelu zastosowaną w symulacjach przedstawimy teraz w postaci intensywnej. Żeby to zrobić, wykorzystamy zmienne: udział płac w PKB $U = \omega L^d / Y$, pracochłonność pełnego zatrudnienia (stosunek efektywnej pracy do kapitału) $l = xL/K$, nominalną stopę procentową r , oczekiwaną inflację π^e , oczekiwaną sprzedaż na jednostkę kapitału trwałego $y^e = Y^e/K$, wielkość zapasów na jednostkę kapitału $v = N/K$ oraz stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału trwałego $b = B/pK$.

Postać intensywna modelu KMG z regułą Taylora jest następująca:

$$\hat{U} = \kappa (\beta_w (1 - \kappa_p) (V - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - \bar{u})), \quad (4.3.1)$$

$$\hat{l} = n - \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) - i_1 (\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) - i_2 (u - \bar{u}), \quad (4.3.2)$$

$$\dot{r} = -\beta_{i_r} (r - r^o) + \beta_{i_p} (\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u} (u - \bar{u}), \quad (4.3.3)$$

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \bar{\pi} - \pi^e), \quad (4.3.4)$$

$$\dot{y}^e = y^e \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) - n + \hat{l} \right), \quad (4.3.5)$$

$$\dot{y} = y - y^d - \nu (n - \hat{l}), \quad (4.3.6)$$

$$\dot{b} = g + rb - \tau_c (\alpha_4 y^d - (1 + \tau_1) Uy - \delta + \alpha_3 rb) - (\tau - \alpha_1) Uy - b (n - \hat{l} + \hat{p}), \quad (4.3.7)$$

gdzie:

$$\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p},$$

$$\hat{p} = \kappa (\kappa_p \beta_w (V - \bar{V}) + \beta_p (u - \bar{u})) + \pi^e,$$

$$V = \frac{y}{l},$$

$$u = \frac{y}{y^p},$$

$$\rho^e = (1 - \tau_p) y^e - (1 + \tau_1) Uy - \delta,$$

$$\alpha_4 = 1 - \tau_p + \frac{\tau_p}{\tau_c} = \text{const},$$

$$y^d = (1 + \alpha_1 - \tau) y U + i_1 (\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) + i_2 (u - \bar{u}) + \delta + g + \\ + \kappa (\beta_w (1 - \kappa_p) (V - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - \bar{u})) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right),$$

$$y = y^e + \beta_n \beta_{N^d} y^e - \beta_n \nu + \\ + y^e \beta_z \left(\kappa (\beta_w (1 - \kappa_p) (V - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - \bar{u})) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right).$$

W modelu KMG z regułą Taylora dynamikę stopy procentowej r opisuje równanie różniczkowe:

$$\dot{r} = -\beta_{i_r} (r - r^o) + \beta_{i_p} (\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u} (u - \bar{u}).$$

(W modelu KMG z rozdziału pierwszego nominalna stopa procentowa r wynika z równowagi na rynku pieniądza.) Ta modyfikacja prowadzi do tego, że podaż pieniądza nie ma wpływu na resztę zmiennych modelu. Z tego powodu nie będzie ona tutaj analizowana. Pozostałe równania modelu KMGT są takie same jak w modelu KMG z rozdziału pierwszego. Tak więc wyprowadzanie powyższych równań modelu KMG z regułą Taylora w postaci intensywnej odbywa się analogicznie do modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza zaprezentowanego w rozdziale pierwszym.

Wartości zmiennych modelu KMGT w stanie stacjonarnym

W równowadze wygasa dynamika tych zmiennych: $\dot{U} = 0, \dot{l} = 0, \dots, \dot{b} = 0$. Żeby wyprowadzić wzory na wartości zmiennych w stanie stacjonarnym, wystarczy rozwiązać układ równań (4.3.1)–(4.3.7), przyrównując ich prawą stronę do zera.

Postępując analogicznie do rozdziału drugiego, tzn. rozwiązując układ równań (4.3.1)–(4.3.7), w którym lewa strona jest równa zero, a niewiadomymi są zmienne: U, l, r, π^e, y^e, v oraz b , można udowodnić, że istnieje dokładnie jeden stan stacjonarny tego modelu opisany wzorami:

$$\bar{\pi}^e = \hat{p} = \bar{\pi}, \quad (4.3.8)$$

$$V = \bar{V}, u = \bar{u}, \quad (4.3.9)$$

$$\bar{y} = \bar{u}y^p, y^p = \text{const}, \quad (4.3.10)$$

$$\bar{l} = \frac{\bar{y}}{\bar{V}}, \quad (4.3.11)$$

$$\bar{y}^d = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} \bar{u}y^p, \bar{y}^e = \bar{y}^d \quad (4.3.12)$$

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1 + \alpha_1 - \tau) \bar{y}}, \quad (4.3.13)$$

$$\bar{\rho} = (1 - \alpha_2) \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{y} - \delta, \bar{\rho} = \bar{\rho}^e \quad (4.3.14)$$

$$\bar{r} = r^o = \bar{\rho} + \bar{\pi} - \xi,^{52} \quad (4.3.15)$$

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c (\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{y} - \delta) - (\tau - \alpha_1) \bar{U} \bar{y}}{\alpha_3 \tau_c \bar{r} - \bar{r} + \mu}. \quad (4.3.16)$$

⁵² Podobnie jak w analizowanym w tej monografii modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym, istnienie stanu stacjonarnego zależy od przyjętej wartości parametru r^o (docelowa nominalna stopa procentowa). Stan stacjonarny modelu (4.3.1)–(4.3.7) istnieje i jest jedyny, jeśli $r^o = \bar{\rho} + \bar{\pi} - \xi$.

Postępując analogicznie do dowodu twierdzenia 3.1 przedstawionego w trzecim rozdziale (zob. s. 115), można udowodnić, że jeśli spełnione są opisane niżej założenia 4.1–4.5, to stan stacjonarny modelu (4.3.1)–(4.3.7) jest lokalnie asymptotycznie stabilny.

Założenie 4.1. Parametry reakcji $\beta_z, \beta_n, \alpha, \beta_p, \beta_w, \beta_{y^e}, \beta_{ip} > 0$ są odpowiednio małe.

Parametry reakcji, o których mowa w założeniu 4.1, występują w równaniach:

- $Y = Y^e + \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N)$ – równanie behawioralne produkcji,
- $\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \bar{\pi} - \pi^e)$ – równanie dynamiki oczekiwań inflacyjnych,
- $\hat{p} = \beta_p (u - \bar{u}) + \kappa_p (\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p) \pi^e$ – równanie dynamiki cen,
- $\hat{w} = \beta_w (V - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^e + n$ – równanie dynamiki płac nominalnych,
- $\dot{Y}^e = \hat{w} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$ – stopa wzrostu oczekiwanego popytu,
- $\dot{r} = -\beta_{i_r} (r - r^o) + \beta_{i_p} (\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u} (u - \bar{u})$ – zmiana nominalnej stopy procentowej.

Zgodnie z założeniem 4.1, produkcja Y jest określana głównie na podstawie oczekiwań popytowych Y^e , których stopa wzrostu $\dot{Y}^e$ zależy z kolei przede wszystkim od stopy wzrostu płacy realnej $\hat{w} = \hat{w} - \hat{p}$. Ze względu na to, że $(1 - \alpha)$ jest bliskie jedności, zmiany oczekiwań inflacyjnych π^e są silnie stabilizowane przez stały czynnik π^o , który odzwierciedla cel inflacyjny. Ponadto:

- odchylenia wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnych od jego normalnego poziomu $(u - \bar{u})$ w niewielkim stopniu wpływają na inflację $\hat{p}$,
- odchylenia wskaźnika zatrudnienia od jego naturalnego poziomu $(V - \bar{V})$ słabo wpływają na dynamikę płacy nominalnej $\hat{w}$,
- wrażliwość nominalnej stopy procentowej r na odchylenia stopy wzrostu cen od celu inflacyjnego $(\hat{p} - \pi^o)$ jest niewielka.

Założenie 4.2. Spełniona jest nierówność:

$$\pi^o < \delta.$$

Zgodnie z założeniem 4.2 cel inflacyjny nie przekracza wartości wskaźnika deprecjacji kapitału δ .

Założenie 4.3. Wartości parametrów reakcji $i_1, i_2 > 0$ występujące w równaniu popytu inwestycyjnego:

$$I = i_1 (\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) K + i_2 (u - u^o) K + \dot{Y}^e K + \delta K,$$

są odpowiednio duże.

Zgodnie z założeniem 4.3 popyt inwestycyjny jest bardzo wrażliwy na różnicę między oczekiwanym zyskiem z kapitału rzeczowego a oczekiwaną realną stopą

procentową oraz na odchylenia wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnych od jego normalnego poziomu.

Założenie 4.4. Wartość parametru reakcji κ_p ($0 < \kappa_p < 1$) w równaniu dynamiki cen

$$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e$$

jest odpowiednio bliska 1.

Zgodnie z założeniem 4.4 stopa inflacji jest bardziej wrażliwa na różnicę między stopą wzrostu płac nominalnych $\hat{w}$ a stopą wzrostu wydajności pracy $n = \dot{x} / x$ niż na oczekiwaną stopę inflacji π^e .

Założenie 4.5. Nominalna stopa procentowa w stanie stacjonarnym jest dodatnia:

$$\bar{r} = r^o = \bar{\rho} + \bar{\pi} - \xi > 0.$$

Twierdzenie 4.2. Jeżeli spełnione są założenia 4.1–4.5, to stan stacjonarny modelu (4.3.1)–(4.3.7) jest lokalnie asymptotycznie stabilny.

4.3.2. Porównanie modeli KMG i KMGT na podstawie symulacji komputerowych

W celu przeprowadzenia symulacji modelu KMGT przyjęto zestaw wartości parametrów z tabeli 4.2, wartości początkowe zmiennych z tabeli 4.5, zestaw 1 wartości parametrów reakcji z tabeli 4.3 oraz zestaw 1 parametrów reakcji. Na podstawie definicji zmiennych modelu intensywnego (4.3.1)–(4.3.7) wyznaczono stan początkowy modelu KMGT, a na podstawie równań (4.3.8)–(4.3.16) obliczono stan stacjonarny modelu KMGT. Wyniki tych obliczeń przedstawiono w tabeli 4.11.

Jednym z celów symulacji komputerowych było porównanie wyników empirycznych modelu KMGT i modelu KMG. Wyznaczony stan początkowy oraz stan stacjonarny modelu KMGT (tabela 4.11) jest taki sam jak dla modelu KMG (tabela 4.6). Wynika to z takich samych wartości parametrów i wartości początkowych oraz z takich samych równań opisujących stan stacjonarny. Chcąc porównać ze sobą wyniki modeli KMG i KMGT, ustalamy, że wartość nominalnej stopy procentowej w stanie stacjonarnym modelu KMGT jest taka sama jak w przypadku kalibracji modelu KMG.

Na podstawie tabel 4.6. oraz 4.11 możemy stwierdzić, że w długim okresie wartości zmiennych porównywanych modeli są takie same. Nie wiemy jednak, w przypadku którego modelu gospodarka szybciej osiąga stan stacjonarny oraz jak wygląda droga dojścia do tego stanu. Żeby odpowiedzieć na te pytania, porównamy teraz wyniki symulacji komputerowych obu modeli.

Tabela 4.11. Porównanie wartości zmiennych modelu KMG w stanie początkowym i w stanie stacjonarnym

Nazwa zmiennej	Symbol	Stan początkowy	Stan stacjonarny	Różnica
Udział płac w PKB	U	0,480	0,560	0,080
Efektywna podaż pracy na jednostkę kapitału	l	0,560	0,582	0,022
Oczekiwana inflacja	π^e	0,000	0,020	0,020
Stosunek oczekiwanej sprzedaży do kapitału	y^e	0,521	0,549	0,027
Wielkość zapasów na jednostkę kapitału	v	0,048	0,122	0,074
Stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału	b	0,257	2,814	2,557
Stopa zatrudnienia	V	0,940	0,950	0,010
Wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnej	u	0,810	0,850	0,040
Stosunek produkcji do kapitału	y	0,535	0,553	0,018
Realna stopa procentowa	R	0,030	0,011	-0,019
Nominalna stopa procentowa	r	0,030	0,031	0,001
Oczekiwana stopa zysku z kapitału	ρ^e	0,108	0,076	-0,033
Inflacja rzeczywista	π	0,016	0,020	0,004
Stosunek popytu do kapitału	y^d	0,521	0,549	0,028

Źródło: obliczenia własne.

Podobnie jak w symulacjach modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza, symulacje modelu KMG-T przeprowadziliśmy, posługując się dyskretnym odpowiednikiem omawianego modelu KMG-T.

Model KMG z regułą Taylora w symulacjach komputerowych:

$$U(t+1) = U(t) + sU(t) \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V(t) - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u(t) - \bar{u}) \right), \quad (4.3.17)$$

$$l(t+1) = l(t) + sl(t) \left(n - \left(\hat{U}(t+1) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) \right) \right) + \\ - sl(t) \left(i_1 \left(\rho^e(t) - \xi - (r(t) - \pi^e(t)) \right) - i_2 (u(t) - \bar{u}) \right), \quad (4.3.18)$$

$$r(t+1) = r(t) - s \left(\beta_r (r(t) - r^o) + \beta_p (\hat{p}(t+1) - \bar{\pi}) + \beta_u (u(t) - \bar{u}) \right), \quad (4.3.19)$$

$$\pi^e(t+1) = \pi^e(t) + s\beta_{\pi^e} \left(\alpha \hat{p}(t+1) + (1 - \alpha) \bar{\pi} - \pi^e(t) \right), \quad (4.3.20)$$

$$y^e(t+1) = y^e(t) + sy^e(t) \left(\hat{U}(t+1) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) - n + \hat{l}(t+1) \right), \quad (4.3.21)$$

$$v(t+1) = v(t) + y(t) - y^d(t) - v(t) \left(n - \hat{l}(t+1) \right), \quad (4.3.22)$$

$$\begin{aligned} b(t+1) = b(t) + \\ + s \left(g + r(t) b(t) - \tau_c \left(\alpha_4 y^d(t) - (1 + \tau_1) U(t) y(t) - \delta + \alpha_3 r(t) b(t) \right) \right) + \\ - s(\tau - \alpha_1) U(t) y(t) - sb(t) \left(n - \hat{l}(t+1) + \hat{p}(t+1) \right), \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

gdzie:

$$\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p} = \text{const},$$

$$\alpha_4 = 1 - \tau_p + \frac{\tau_p}{\tau_c} = \text{const},$$

$$\hat{p}(t+1) = \left(\kappa \left(\kappa_p \beta_w (V(t) - \bar{V}) + \beta_p (u(t) - \bar{u}) \right) + \pi^e(t) \right),$$

$$V(t) = \frac{y(t)}{l(t)},$$

$$u(t) = \frac{y(t)}{y^p},$$

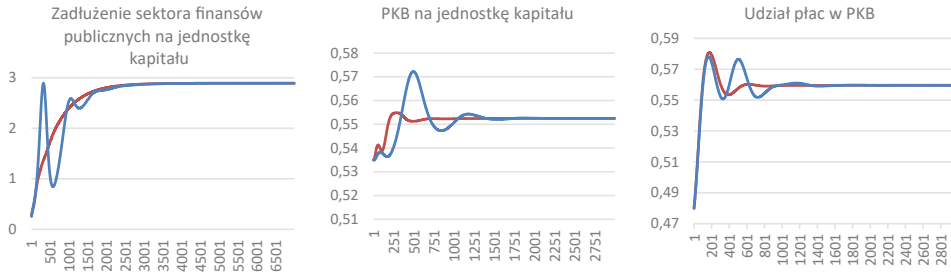
$$\rho^e(t) = (1 - \tau_p) y^e(t) - (1 + \tau_1) U(t) y(t) - \delta,$$

$$\begin{aligned} y^d(t) = (1 + \alpha_1 - \tau) y(t) U(t) + i_1 \left(\rho^e(t) - \xi - (r(t) - \pi^e(t)) \right) + i_2 (u(t) - \bar{u}) + \delta + \\ + g + \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V(t) - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u(t) - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = y^e + \beta_n \beta_{N^d} y^e(t) - \beta_n v(t) + \\ + y^e(t) \beta_z \left(\kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V(t) - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u(t) - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

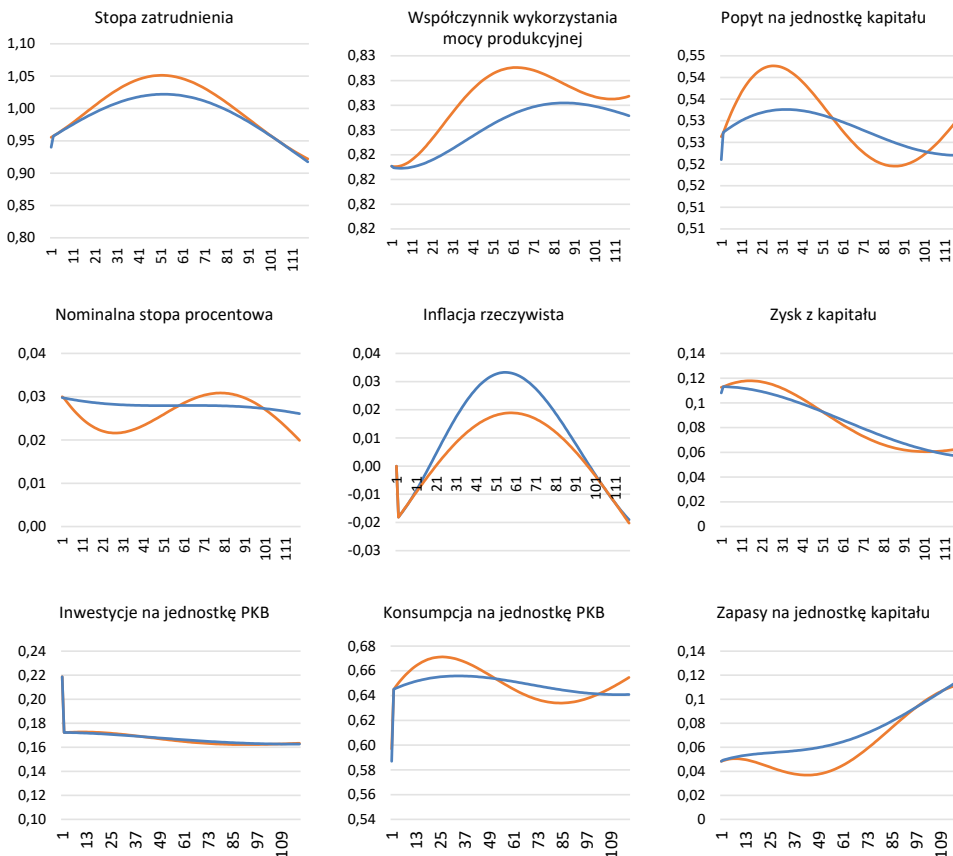
Na rysunku 4.22 przedstawiono trajektorie wybranych zmiennych modelu KMGU uzyskane na podstawie układu równań (4.3.17)–(4.3.23) oraz trajektorie wynikające z modelu KMG uzyskane na podstawie układu równań (4.2.3)–(4.2.9) dla tego samego zestawu wartości parametrów i wartości zmiennych w stanie początkowym w dłuższym horyzoncie czasowym.

Na podstawie wyników symulacji przedstawionych na rysunku 4.22 możemy stwierdzić, że w wypadku modelu KMGU gospodarka szybciej osiąga stan stacjo-



Rysunek 4.22. Długookresowa dynamika zmiennych modelu KMGT (kolor pomarańczowy) na tle dynamiki modelu KMG (kolor niebieski)

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 4.23. Krótkookresowa dynamika zmiennych modelu KMGT (kolor pomarańczowy) na tle dynamiki modelu KMG (kolor niebieski)

Źródło: obliczenia własne.

narny oraz w pierwszych okresach trajektorie prezentowanych zmiennych mają mniejsze fluktuacje niż trajektorie modelu KMG. Oznacza to, że dzięki zmianie polityki pieniężnej na taką, która reaguje na sytuacje zachodzące w gospodarce i ma wyznaczone cele (np. cel inflacyjny), gospodarka szybciej znajduje się na ścieżce równomiernego wzrostu.

Na kolejnych wykresach (rysunek 4.23) porównano trajektorie modeli KMGT i KMG w krótkim okresie. Podobnie jak w długim horyzoncie czasowym, widoczna jest różnica między trajektoriami modeli KMGT i KMG. Na podstawie trajektorii współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej możemy wywnioskować, że w wypadku modelu KMGT występuje wyższy poziom produkcji. Wynika on z większego popytu inwestycyjnego, do którego przyczynia się niższa realna stopa procentowa, która została w pierwszych okresach obniżona ze względu na niski poziom inflacji (niższy od celu inflacyjnego) i niską wartość współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej (niższy od zakładanej wartości naturalnej tego wskaźnika). Większy popyt oznacza większą stopę zysku z kapitału oraz większą stopę zatrudnienia. Wyższa stopa zatrudnienia przekłada się na większą konsumpcję prywatną oraz wzrost płac nominalnych, co jeszcze bardziej zwiększa popyt. Wzrost płac nominalnych oraz współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej pociąga za sobą wzrost inflacji. Gdy inflacja przekroczy cel inflacyjny, dzięki polityce pieniężnej (reguła Taylora) zmniejszona zostaje nominalna stopa procentowa, co w dalszej konsekwencji wpływa na zmniejszenie inflacji.

4.3.3. Analiza wpływu polityki fiskalnej i pieniężnej na gospodarkę opisaną równaniami modelu KMGT

Polityka fiskalna

Wpływ polityki fiskalnej na funkcjonowanie gospodarki opisanej za pomocą równań modelu KMGT w długim okresie jest taki sam jak w wypadku gospodarki opisanej modelem KMG. Ten wniosek bezpośrednio wynika z porównania równań opisujących stan stacjonarny modelu KMGT i modelu KMG. Jediną różnicą może być czas dojścia do stanu stacjonarnego oraz fluktuacje w pierwszych okresach symulacji. Żeby to sprawdzić, podobnie jak dla modelu KMG, należy zbadać wpływ polityki fiskalnej w krótkim i długim okresie za pomocą symulacji komputerowych. Jednak szerszą analizę polityki fiskalnej w tej monografii pomijamy. Uwagę skupiamy na wpływie polityki pieniężnej na funkcjonowanie gospodarki opisanej modelem KMGT, którą przedstawiono w kolejnym punkcie tego podrozdziału.

Polityka pieniężna

Podstawową różnicą między omawianymi modelami KMG i KMGT jest wprowadzenie do tego drugiego reguły Taylora, podczas gdy w pierwszym modelu po-

daż pieniądza jest opisana jako wielkość egzogeniczna. Celem wprowadzenia reguły Taylora do modelu KMG jest urealnienie modelu do funkcjonowania rzeczywistej polskiej gospodarki, w której stosuje się regułę stóp procentowych jako instrument polityki pieniężnej⁵³ (w modelu KMG instrumentem polityki pieniężnej jest stopa wzrostu podaży pieniądza). W praktyce oznacza to, że w modelu KMG mamy dodatkowe równanie, którym jest dynamiczne równanie nominalnej stopy procentowej:

$$\dot{r} = -\beta_r (r - r^o) + \beta_p (\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_u (u - \bar{u}), \quad (4.3.24)$$

gdzie β_r , β_p , β_u to parametry reakcji, r^o – wartość stopy procentowej w stanie stacjonarnym (naturalna stopa procentowa), $\bar{\pi}$ – stopa inflacji w stanie stacjonarnym (cel inflacyjny), $\bar{u}$ – pożądany stopień wykorzystania mocy produkcyjnej.

W równaniu (4.3.24) mamy trzy czynniki wpływające na wzrost stopy procentowej: odchylenie nominalnej stopy procentowej od jej naturalnej wartości, odchylenie rzeczywistej stopy inflacji od celu inflacyjnego i odchylenie współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej od naturalnej wartości tego współczynnika. Siła wpływu tych czynników zależy od polityki pieniężnej rządu, co przekłada się na wartości parametrów reakcji tego równania: β_r , β_p oraz β_u . Ich oszacowanie dla polskiej gospodarki zostało przedstawione m.in. w pracach Trzepli (2007) i Baranowskiego (2014), z których wynika, że polityka pieniężna NBP charakteryzuje się bardzo małą wrażliwością na zmiany wartości luki popytowej. W równaniu (4.3.24) wrażliwość tę określa parametr reakcji β_u ⁵⁴. Niska wrażliwość wynika m.in. z niedokładności badania związanej z trudnościami oszacowania luki popytowej. Zdecydowanie większe znaczenie w ustalaniu poziomu nominalnej stopy procentowej dla polskiej gospodarki ma utrzymanie pożądanego poziomu inflacji (Trzepla, 2007). Wrażliwość na odchylenia od tego poziomu opisuje parametr reakcji β_p ⁵⁵. Wysoka wrażliwość w tym zakresie wynika w dużej mierze z charakteru polityki pieniężnej, ukierunkowanej na osiągnięcie, a następnie utrzymanie inflacji na odpowiednim poziomie. Biorąc pod uwagę wyniki badań przedstawione w pracy Trzepli (2007), w symulacjach przyjęto następujące wartości parametrów reakcji: $\beta_p = 0,2$ oraz $\beta_u = 0,01$. Ponadto w symulacjach, podobnie jak Chiarella i in. (2005)⁵⁶, przyjęto wartość parametru reakcji $\beta_r = 0,2$ (parametr wygładzania stóp procentowych).

Podczas analizy polityki pieniężnej skupimy się na głównym celu NBP, którym jest stabilność cen (NBP, b.r.a).

⁵³ W Polsce polityka pieniężna jest prowadzona raczej w sposób ekspercki niż „mechanicznie” według ustalonej prostej reguły Taylora. W szczególności bierze się pod uwagę znacznie szerszy zbiór zmiennych niż stopa inflacji i luka produkcyjna, a do tego siła reakcji na wahania wartości tych zmiennych może się zmieniać w czasie (Baranowski, 2014).

⁵⁴ Wrażliwość na zmianę tej wartości to zaledwie $1,29E-10$ (Trzepla, 2007).

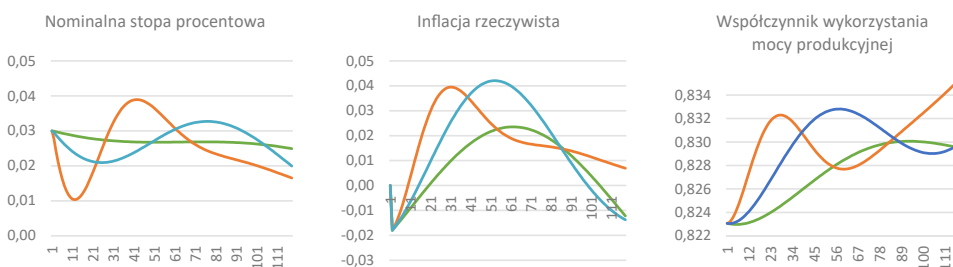
⁵⁵ Wrażliwość na zmianę tej wartości wynosi 0,25 (Trzepla, 2007).

⁵⁶ W pracy Chiarelli i in. (2005) dla parametrów reakcji przyjęto wartości: $\beta_r = 1,1$, $\beta_p = 1,2$.

Na rysunku 4.24 przedstawiono trajektorie inflacji, nominalnej stopy procentowej i współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej dla trzech zestawów wartości parametrów reakcji: β_r , β_i oraz β_u . W zestawie 1 wszystkie wartości parametrów reakcji w równaniu przyrostu nominalnej stopy procentowej zmniejszamy pięciokrotnie względem zestawu bazowego, co odpowiada słabszej reakcji banku centralnego na sytuację w gospodarce. Zmienne te mają więc wartości: $\beta_r = \beta_i = 0,04$, $\beta_u = 0,002$.

W zestawie 2 wszystkie wartości parametrów zwiększamy pięciokrotnie, co odpowiada silniejszej reakcji banku centralnego na sytuację w gospodarce. Zmienne te mają więc wartości: $\beta_r = \beta_i = 1$, $\beta_u = 0,05$.

W zestawie 3 (zestaw bazowy) mamy: $\beta_r = \beta_i = 0,2$, $\beta_u = 0,01$.



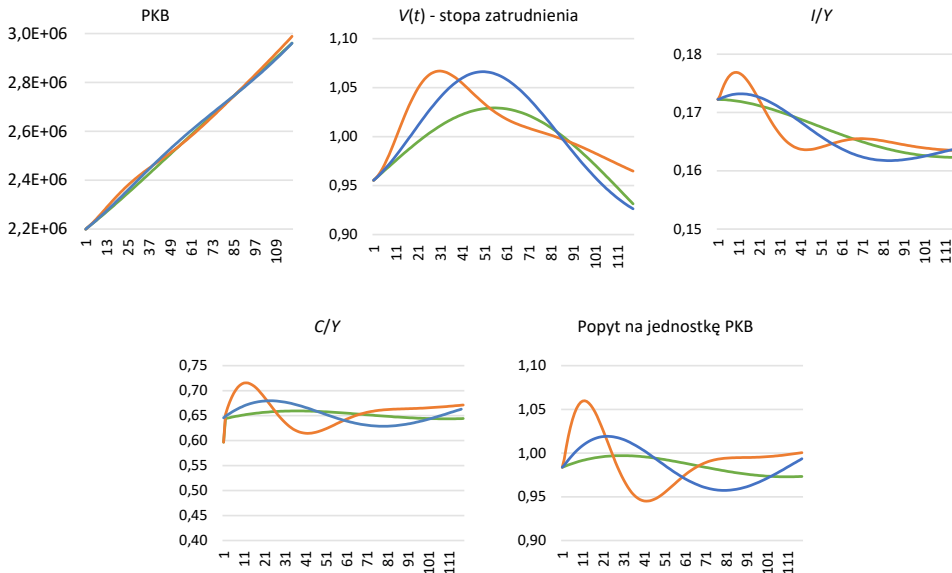
Rysunek 4.24. Dynamika wybranych zmiennych modelu KMGT dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji. Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla zestawu 1 (słabsza reakcja banku centralnego), niebieskie dla zestawu 2 (reakcja silniejsza), pomarańczowe dla zestawu 3 (bazowego)

Źródło: obliczenia własne.

Z przeprowadzonych eksperymentów symulacyjnych wynika, że wzmocnienie reakcji banku centralnego (zestaw 2, wykresy pomarańczowe) powoduje większe obniżenie nominalnej stopy procentowej w sytuacji, gdy poziom inflacji jest poniżej celu inflacyjnego. Podobnie jest w sytuacji, gdy stopa inflacji jest powyżej celu. Dzięki takiej szybkiej reakcji banku centralnego stopa inflacji dużo szybciej zaczyna zmniejszać się niż w przypadku gospodarki opisanej którymś z pozostałych dwóch zestawów wartości parametrów reakcji. We wszystkich trzech przypadkach luka popytowa (różnica między wartością współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej a jego wartością naturalną) cyklicznie maleje.

Na koniec przyjrzyjmy się jeszcze, jak zmiana wartości parametrów reakcji w równaniu nominalnej stopy procentowej wpływa na popyt i produkcję.

Z wykresów symulacji przedstawionych na rysunku 4.25 wynika, że produkcja (PKB) nieznacznie reaguje na zmianę analizowanych wartości parametrów reakcji. W pierwszych okresach, gdy inflacja jest na niskim poziomie i NBP podnosi stopę



Rysunek 4.25. Dynamika wybranych zmiennych modelu KMG dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji. Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla zestawu 1 (słabsza reakcja banku centralnego), niebieskie dla zestawu 2 (reakcja silniejsza), pomarańczowe dla zestawu 3 (zestaw bazowy)

Źródło: obliczenia własne.

procentową, w wypadku gospodarki opisanej drugim zestawem wartości parametrów reakcji (wykresy niebieskie, silniejsza reakcji NBP) popyt wyraźnie rośnie najszybciej w porównaniu z dwoma pozostałymi scenariuszami, co wynika z rosnącej konsumpcji i rosnących inwestycji. Towarzyszy temu najszybszy wzrost produkcji, który pociąga za sobą silny wzrost stopy zatrudnienia i współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej, co sprzyja wzrostowi inflacji. Zbyt wysoki poziom inflacji, powyżej celu inflacyjnego, prowadzi do wzrostu stopy procentowej, co negatywnie wpływa na inwestycje. Stopa zatrudnienia powoli zaczyna się zmniejszać w wyniku wzrostu wydajności pracy, która w modelu rośnie wykładniczo, co dalej negatywnie wpływa na konsumpcję prywatną i popyt całkowity.

Gdy reakcje banku centralnego są najsilniejsze, uwiadcniają się dużo większe fluktuacje trajektorii zmiennych modelu. Trudno jednoznacznie stwierdzić, która polityka banku centralnego jest lepsza, a która gorsza. Jej ocena zależy od bardziej szczegółowych okoliczności gospodarczych. Dobrym sposobem na uzyskanie takiej oceny jest analiza polityki pieniężnej w obliczu kryzysów gospodarczych. W kolejnym podrozdziale przeprowadzono symulację kryzysu gospodarczego i przeanalizowano reakcje gospodarki, uwzględniając to, jaka polityka pieniężna jest prowadzona.

4.3.4. Podsumowanie

Symulacje komputerowe zaprezentowane w tym podrozdziale wykazały znaczące różnice między trajektoriami modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza a modelu KMGT z regułą Taylora. Gospodarka opisana modelem KMGT dużo szybciej osiąga stan stacjonarny niż gospodarka opisana modelem KMG. Ponadto trajektorie zmiennych modelu KMGT w porównaniu z trajektoriami zmiennych modelu KMG mają znacznie mniejsze fluktuacje w pierwszych okresach. Oznacza to, że zastosowanie polityki pieniężnej przedstawionej w modelu KMGT pozytywnie wpływa na wzrost gospodarczy.

Ponadto z przeprowadzonych symulacji modelu KMGT wynika, że szybka reakcja banku centralnego na zmiany w gospodarce przejawia się szybszą stabilizacją cen w wypadku utrzymywania się wysokiej inflacji. Jednocześnie szybka reakcja banku centralnego sprzyja większym fluktuacjom trajektorii zmiennych modelu w porównaniu z gospodarką, w której reakcja banku jest dużo wolniejsza. Zatem ocena, czy szybka reakcja banku centralnego jest lepsza, czy gorsza, zależy m.in. od aktualnego stanu całej gospodarki. Żeby to zbadać, w kolejnym podrozdziale przeprowadzono analizę polityki pieniężnej gospodarki opisaną modelem KMGT w obliczu kryzysu gospodarczego.

4.4. Symulacje wpływu szoków zewnętrznych na polską gospodarkę w świetle modelu KMGT

W niniejszym podrozdziale przedstawiono wyniki symulacji komputerowych mających na celu zbadanie reakcji gospodarki opisaną modelem KMGT (KMG z regułą Taylora) na krótkookresowe zewnętrzne zaburzenia takie jak szoki gospodarcze. Analiza koncentruje się na ocenie wpływu tych szoków na gospodarkę rozwijającą się w sposób równomierny oraz na roli polityki pieniężnej w procesie powrotu do stanu równowagi.

4.4.1. Charakterystyka szoków zewnętrznych

Symulacja szoków polega na wprowadzeniu do modelu KMGT modyfikacji niektórych jego równań oraz na zmianie wartości wybranych parametrów, dzięki czemu uzyskujemy sytuację odzwierciedlającą wytrącenie gospodarki ze ścieżki równomiernego wzrostu. Modyfikacja równań oraz zmiana wartości parametrów odnoszą się jedynie do kilku okresów. Zakończenie czasu oddziaływania szoku jest opisane za pomocą przywrócenia pierwotnych postaci wszystkich równań modelu oraz pierwotnych wartości wszystkich parametrów.

Wprowadzone modyfikacje równań oraz zmiany wartości parametrów modelu są próbą odzwierciedlenia kryzysu gospodarczego wywołanego przez epidemię wirusa SARS-CoV-2. Zastosowane zmiany modelu opierają się na danych o polskiej gospodarce w czasie tego kryzysu (tabela 4.12).

Tabela 4.12. Dynamika wybranych kategorii makroekonomicznych w latach 2018–2021 (ceny stałe roku poprzedniego)

Wyszczególnienie	2018	2019	2020	2021
Spożycie ogółem	104,3	104,5	98,9	104,8
w tym:				
– spożycie w sektorze gospodarstw domowych	104,3	104,0	97,0	106,2
– spożycie publiczne w sektorze instytucji rządowych i samorządowych	103,5	106,5	104,9	100,9
Nakłady brutto na środki trwałe	109,4	106,1	91,0	108,0
Popyt krajowy	105,6	103,6	96,6	108,2
PKB	105,4	104,7	97,7	105,7

Źródło: GUS.

Z danych przedstawionych w tabeli 4.12 możemy odczytać, że PKB w roku 2020 zmalał realnie w stosunku do roku 2019 o 2,3%, natomiast w 2021 wzrósł realnie o 5,7% w stosunku do roku 2020. Na tej podstawie nowe równania opisujące realną wartość PKB w latach 2020 oraz 2021 będą miały postać:

$$Y(2) = Y(1) - 2,3\% \cdot Y(1),$$

$$Y(3) = Y(2) + 5,7\% \cdot Y(2).$$

Uwaga 4.6. Przez $Y(0)$, $Y(1)$, $Y(2)$, $Y(3)$ oznaczamy wartości zmiennych w latach 2018, 2019, 2020, 2021 odpowiednio.

Całkowity realny popyt Y^d w 2020 roku w stosunku do roku 2019 zmalał realnie o 3,4%, a w 2021 wzrósł realnie w stosunku do 2020 o około 8%, a więc:

$$Y^d(2) = Y^d(1) - 3,4\% \cdot Y^d(1),$$

$$Y^d(3) = Y^d(2) + 8,2\% \cdot Y^d(2).$$

Na zmianę całkowitego popytu Y^d w poszczególnych okresach miał wpływ:

- popyt inwestycyjny brutto I , który w 2020 roku był niższy o 9% w stosunku do roku 2019, a w 2021 roku w stosunku do 2020 był wyższy o 8%:

$$I(2) = I(1) - 9\% \cdot I(1),$$

$$I(3) = I(2) + 8\% \cdot I(2),$$

- konsumpcja sektora prywatnego C , która w 2020 roku była mniejsza o około 3% w stosunku do roku 2019, a w 2021 w stosunku do 2020 wzrosła o 6,2%:

$$C(2) = C(1) - 3\% \cdot C(1),$$

$$C(3) = C(2) + 6,2\% \cdot C(2),$$

- popyt sektora publicznego G , który w 2020 roku wzrósł realnie w stosunku do roku 2019 o około 5%, a w 2021 w stosunku do 2020 wzrósł realnie o około 1%:

$$G(2) = G(1) + 5\% \cdot G(1),$$

$$G(3) = G(2) + 1\% \cdot G(2).$$

Z drugiej strony w symulacjach uwzględniono zastosowanie przez polski rząd tak zwanej tarczy antykryzysowej. Miała ona na celu uchronić stan gospodarczy kraju za pomocą finansowania kosztów strat poniesionych przez społeczeństwo w czasie kryzysu gospodarczego. Jednym z działań polskiego rządu była ochrona miejsc pracy oraz wysokości wynagrodzeń. Te działania zostały ujęte w eksperymentach symulacyjnych przez założenie, że popyt na pracę oraz wzrost płac nominalnych w 2020 roku był taki jak w 2019 roku, czyli:

$$L^d(2) = L^d(1),$$

$$\hat{w}(2) = \frac{w(2) - w(1)}{w(1)} = 0.$$

W symulacjach zakładamy, że rząd sfinansował tarczę antykryzysową z budżetu państwa. Jeśli założymy, że wielkość tego dofinansowania była równa D (sposób oszacowania wartości D przedstawiono w dalszej części), to deficyt finansów publicznych w roku 2020 opisuje równanie:

$$\frac{\Delta B(2)}{p(2)} = \frac{B(2) - B(1)}{p(2)} = G(2) + \frac{r(2)B(2)}{p(2)} + TR(2) + D - T(2).$$

Pokażemy teraz sposób obliczenia wysokości dofinansowania rządu D . Przy założeniu, że to dofinansowanie było przeznaczone jedynie na dopłaty do wynagrodzeń, jego wysokość jest równa różnicy między kosztami pracy poniesionymi przez pracodawcę przy zatrudnieniu w 2020 roku, które, jak zakładaliśmy wcześniej, było takie samo jak w roku 2019 ($L^d(2) = L^d(1)$), a kosztami pracy przy zatrudnieniu $Y(2)$ potrzebnym do zrealizowania produkcji w 2020 roku:

$$D = L^d(2) \omega(1) - \tilde{L}^d \omega(1),$$

gdzie $\tilde{L}^d$ to (teoretyczny) popyt na pracę obliczony dla produkcji $Y(2)$ w 2020 roku. Korzystając z definicji popytu na pracę, otrzymujemy popyt równy:

$$\tilde{L}^d = \frac{Y(2)}{x(2)}.$$

Zatem koszt pracy (nie licząc składki na ubezpieczenie społeczne) przy popycie $\tilde{L}^d$ jest równy:

$$\tilde{L}^d \omega(1) = \frac{Y(2)}{x(2)} \omega(1).$$

Z kolei koszt pracy przy założeniu, że $L^d(2) = L^d(1)$, wynosi:

$$L^d(1) \omega(1) = \frac{Y(1)}{x(2)} \omega(1).$$

Wykorzystując powyższe równania, uzyskujemy wysokość dofinansowania rządu równą:

$$D = L^d(1) \omega(1) - L^d(2) \omega(1) = \frac{Y(1)}{x(2)} \omega(1) - \frac{Y(2)}{x(2)} \omega(1).$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$D = \frac{\omega(1)}{x(2)} (Y(1) - Y(2)),$$

gdzie

$$Y(2) = Y(1) - 2,5\% \cdot Y(1).$$

Stąd ostatecznie otrzymujemy:

$$D = 2,5\% \cdot Y(1) \frac{\omega(1)}{x(2)}.$$

Dodatkowo, w roku 2020 wydajność pracy w polskiej gospodarce (według Eurostatu) zmniejszyła się względem roku 2019 o 2,5%, co także uwzględniamy w naszych symulacjach przez wprowadzenie równania:

$$x(2) = x(1) - 2,5\% \cdot x(1).$$

W 2020 roku NBP obniżył stopę referencyjną trzykrotnie: o 0,5, o 0,5 i o 0,4 p.p. A w 2021 roku trzykrotnie podwyższył tę stopę: o 0,4, o 0,75 i o 0,5 p.p. W symulacjach działania NBP przedstawiamy za pomocą równań:

$$r(2) = r(1) - 0,014$$

oraz

$$r(3) = r(2) + 0,0165.$$

Zestawienie w tabeli 4.13 podsumowuje wszystkie równania modelu po zmianach wprowadzonych na potrzeby symulacji kryzysu gospodarczego.

Tabela 4.13. Równania modelu KMG z regułą Taylora w czasie kryzysu gospodarczego i po kryzysie

Lp.	Nazwa zmiennej	Równanie
Determinanty popytu		
1	Popyt na produkt	$Y^d(t) = C(t) + I(t) + G(t)$ $Y^d(2) = Y^d(1) - 3,4\% \cdot Y^d(1)$ $Y^d(3) = Y^d(2) + 8,2\% \cdot Y^d(2)$
2	Konsumpcja sektora prywatnego	$C(t) = (1 - \tau + \alpha_i) \omega(t) L^d(t)$ $C(2) = C(1) - 3\% \cdot C(1)$ $C(3) = C(2) + 6,2\% \cdot C(2)$
3	Popyt na pracę	$L^d(t) = \frac{Y(t)}{x(t)}$ $L^d(2) = L^d(1)$
4	Stopa wzrostu wydajności pracy	$x(t+1) = x(t) + nx(t)$ $x(2) = x(1) - 2,5\% \cdot x(1)$
5	Stopa wzrostu płacy realnej	$\hat{\omega}(t) = \hat{w}(t) - \hat{p}(t)$
6	Stopa wzrostu płac nominalnych	$\frac{w(t+1) - w(t)}{w(t)} = \beta_w (V(t) - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p}(t) + (1 - \kappa_w) \pi^e(t) + n$ $\hat{w}(2) = \frac{w(2) - w(1)}{w(1)} = 0$
7	Stopa wzrostu cen	$\hat{p}(t+1) = \frac{p(t+1) - p(t)}{p(t)} = \beta_p (u(t) - \bar{u}) + \kappa_p (\hat{w}(t) - n) + (1 - \kappa_p) \pi^e$
8	Oczekiwany przyrost inflacji	$\pi^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e)$ $\pi^e(t+1) - \pi^e(t) = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p}(t) + (1 - \alpha)(\mu + 0,025) - \pi^e(t))$
9	Stopa zatrudnienia	$V(t) = \frac{L^d(t)}{L}$
10	Wskaźnik wykorzystania potencjału produkcyjnego	$u(t) = \frac{Y(t)}{Y^p}$

cd. tabeli 4.13

Lp.	Nazwa zmiennej	Równanie
11	Produkcja potencjalna	$Y^p(t) = y^p K(t)$
12	Przyrost kapitału rzeczowego	$\Delta K(t+1) = i_1 \left((1 - \alpha_2) \rho^e(t) - \xi - (r(t) - \pi^e(t)) \right) K(t) +$ $+ i_2 (u(t) - \bar{u}) K(t) + \hat{Y}^e(t) K(t) - \delta K(t)$
13	Oczekiwana realna stopa zysku z kapitału Rzeczywista realna stopa zysku z kapitału	$\rho^e(t) = \frac{Y^e(t) - \omega(t) L^d(t) - \delta K(t)}{K(t)}$ $\rho(t) = \frac{Y^d(t) - \omega(t) L^d(t) - \delta K(t)}{K(t)}$
14	Oczekiwana stopa wzrostu popytu	$\hat{Y}^e(t) = \frac{\Delta Y^e(t)}{Y^e(t)} = \hat{\omega}(t) + \beta_{y^e} \frac{Y^d(t) - Y^e(t)}{Y^e(t)}, \text{ gdzie}$ $\hat{\omega}(t) = \hat{\omega}(t) - \hat{p}(t), \Delta Y^e(t) = Y^e(t) - Y^e(t-1)$
15	Popyt inwestycyjny	$I(t+1) = K(t+1) - K(t) + \delta K(t)$ $I(2) = I(1) - 9\% \cdot I(1),$ $I(3) = I(2) + 8\% \cdot I(2).$
Produkcja i zapasy		
16	Produkcja	$Y(t) = Y^e(t) + Z(t)$ $Y(2) = Y(1) - 2,3\% \cdot Y(1)$ $Y(3) = Y(2) + 5,7\% \cdot Y(2)$
17	Produkcja przeznaczona na zapasy	$Z(t) = \beta_z \Delta Y^e(t) + \beta_n (N^d(t) - N(t))$ $\Delta Y^e(t) = Y^e(t) - Y^e(t-1)$
18	Pożądane zapasy	$N^d(t) = \beta_{N^d} Y^e(t)$
19	Zmiana zapasów	$N(t+1) - N(t) = Y(t) - Y^d(t)$
Reguła Taylora		
20	Przyrost nominalnej stopy procentowej	$r(t+1) = r(t) - \beta_{i_r} (r(t) - r^o) + \beta_{i_p} (\hat{p}(t+1) - \bar{\pi}) + \beta_{i_u} (u(t) - \bar{u})$ $r(2) = r(1) - 0,014$ $r(3) = r(2) + 0,0165$
Budżet państwa		
21	Podatki	$T(t) = \tau \omega(t) L^d(t) +$ $+ \tau_c \left(\alpha_4 Y^d(t) - (1 + \tau_1) \omega(t) L^d(t) - \delta K(t) + \alpha_3 \frac{r(t) B(t)}{p(t)} \right),$ $\text{gdzie } \tau = \tau_w + \tau_2, \alpha_4 = \left(1 - \tau_p + \frac{\tau_p}{\tau_c} \right).$

cd. tabeli 4.13

Lp.	Nazwa zmiennej	Równanie
22	Popyt sektora rządowego	$G(t) = gK(t)$ $G(2) = G(1) + 5\% \cdot G(1) = 1,05gK(1)$ $G(3) = G(2) + 1\% \cdot G(2) = 1,0105gK(1)$
23	Deficyt finansów publicznych	$\Delta B(t) = B(t) - B(t-1) = p(t)G(t) + r(t)B(t) - p(t)T(t)$ $\Delta B(2) = B(2) - B(1) =$ $= p(2)G(2) + r(2)B(2) - p(2)T(2) + p(2)TR + p(2)D,$ gdzie $D = \frac{2,5\% \cdot Y(1) \omega(1)}{97,5\% \cdot x(1)}$ oraz $TR = \alpha_2 \omega(2) L^d(2)$

4.4.2. Procedury obliczeniowe

Eksperymenty symulacyjne zaczynamy od założenia, że stanem początkowym jest stan gospodarki z roku 2018, czyli $t = 0$ oznacza rok 2018. Ponadto zakładamy, że analizowana gospodarka od 2018 do 2020 roku znajduje się na ścieżce równomiernego wzrostu. Oznacza to, że wartości zmiennych absolutnych, tj. produkcja, konsumpcja, kapitał trwały itd., od 2018 do 2020 roku rosną z tą samą stopą wzrostu równą n . Zaburzenia (szoki zewnętrzne) odzwierciedlone w zmianie niektórych równań modelu wprowadzamy od 2020 do 2021 roku włącznie. Po tym czasie dla wszystkich równań modelu przyjmujemy ponownie ich pierwotne postacie.

Sposób przeprowadzenia symulacji modelu KMGT wygląda bardzo podobnie do dotychczasowych. Punktem odniesienia jest tzw. scenariusz bazowy, odpowiadający bazowemu zestawowi wartości parametrów i początkowych wartości zmiennych. Wartości parametrów oraz początkowe wartości zmiennych obliczamy na podstawie danych o polskiej gospodarce za rok 2018 (tabela 4.1), zakładając, że gospodarka znajduje się na ścieżce równomiernego wzrostu. W symulacjach przyjmujemy, że funkcjonowanie gospodarki opisuje zmodyfikowany model KMGT, którego równania przedstawiono w tabeli 4.13. W symulacjach wykorzystamy to, że równania modelu KMGT z tabeli 4.13 można przedstawić w prostszej, równoważnej postaci intensywnej.

W eksperymentach symulacyjnych uwidacznia się problem polegający na tym, że modele omawiane w niniejszej monografii, w tym model KMG z regułą Taylora, są modelami ciągłymi, podczas gdy dane o polskiej gospodarce, tak jak w przypadku jakiejkolwiek gospodarki, są dyskretnie. Problem ten rozwiązujemy analogicznie do poprzednich symulacji, stosując metodę Eulera z krokiem $h = 1/12$. Dodatkowo musimy zwrócić uwagę na dane o polskiej gospodarce w czasie kryzysu gospodarczego. Dane te odnoszą się do roku poprzedniego. Natomiast gdy stosujemy metodę Eulera z krokiem $h = 1/12$, równania modelu w postaci intensywnej odnoszą do ubiegłego miesiąca.

Dyskretna postać intensywna modelu KMGT

Od 2018 do 2020 roku gospodarka znajduje się w stanie stacjonarnym. Oznacza to, że wartości zmiennych modelu intensywnego w tych latach nie zmieniają się. Następnie, od roku 2020, następuje kryzys gospodarczy, który trwa dwa kolejne lata. Funkcjonowanie gospodarki w pierwszym roku kryzysu opisują równania modelu intensywnego:

$$U(t+h) = U(t) + h \cdot \kappa(-n_1),$$

gdzie n_1 to stopa wzrostu wydajności pracy w czasie kryzysu równa $-2,5\%$,

$$l(t+h) = l(t) + h \left(n_1 - 0,88 \frac{(n - \hat{l}(2))K(1)}{K(t)} \right),$$

$$\pi^e(t+h) = \pi^e(t) + h\beta_{\pi^e} \left(\alpha \hat{p}(t+h) + (1-\alpha)\bar{\pi} - \pi^e(t) \right),$$

$$y^e(t+h) = y^e(t) + h y^e(t) \left(\hat{U}(t+h) + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) + \hat{l}(t+h) \right),$$

$$v(t+h) = v(t) + h \left(y(t) - y^d(t) - v(t) \left(n_1 - \hat{l}(t+h) \right) \right),$$

$$b(t+h) = b(t) + h \left(g + r(t)b(t) - \tau_c \left(\rho + \alpha_3 r(t)b(t) \right) - (\tau - \alpha_1)U(t)y(t) + \right. \\ \left. - hb(t) \left(n - \hat{l}(t+h) + \hat{p}(t+h) \right) \right),$$

$$r(t+h) = r(t) - h \cdot 0,014,$$

$$y^d(t) = \frac{0,966 y^d(1)K(1)}{K(t)},$$

$$y(t) = \frac{0,977 y(1)K(1)}{K(t)},$$

$$V(t) = V(t-1).$$

Gospodarka w drugim roku kryzysu jest opisana za pomocą następujących równań modelu intensywnego:

$$U(t+h) = U(t) + h \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V(t) - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_p) (u(t) - \bar{u}) \right) U(t),$$

$$l(t+h) = l(t) + h \left(n_1 - 1,08 \cdot \frac{(n - \hat{l}(3))K(2)}{K(t)} \right),$$

$$\pi^e(t+h) = \pi^e(t) + h\beta_{\pi^e} \left(\alpha \hat{p}(t+1) + (1-\alpha) \bar{\pi} - \pi^e(t) \right),$$

$$y^e(t+h) = y^e(t) + h y^e(t) \left(\hat{U}(t+1) + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) + \hat{l}(t+h) \right),$$

$$v(t+h) = v(t) + h \left(y(t) - y^d(t) - v(t) \left(n - \hat{l}(t+h) \right) \right),$$

$$b(t+h) = b(t) + h \left(g + r(t) b(t) - \tau_c \left(\rho + \alpha_3 r(t) b(t) \right) - (\tau - \alpha_1) U(t) y(t) \right) + \\ - h b(t) \left(n - \hat{l}(t+h) + \hat{p}(t+h) \right),$$

$$r(r+h) = r(t) + h \cdot 0,0165,$$

$$y^d(t) = \frac{1,08 y^d(2) K(2)}{K(t)},$$

$$y(t) = \frac{1,057 y(2) K(2)}{K(t)},$$

$$V(t) = V(t-1).$$

Z założenia po dwóch latach kryzysu szoki zewnętrzne przestają oddziaływać, co odzwierciedlone jest w modelu KMG T przywróceniem jego równań do oryginalnej postaci:

$$U(t+h) = U(t) + h \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V(t) - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u(t) - \bar{u}) \right) U(t),$$

$$l(t+h) = l(t) + h \left(-\hat{U}(t+h) - \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) \right) l(t) + \\ + h \left(-i_1 \left(\rho^e(t) - \xi - (r(t) - \pi^e(t)) \right) - i_2 (u(t) - \bar{u}) \right) l(t),$$

$$\pi^e(t+h) = \pi^e(t) + h\beta_{\pi^e} \left(\alpha \hat{p}(t+h) + (1-\alpha) \bar{\pi} - \pi^e(t) \right),$$

$$y^e(t+h) = y^e(t) + h y^e(t) \left(\hat{U}(t+1) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) - n + \hat{l}(t+h) \right),$$

$$v(t+h) = v(t) + h \left(y(t) - y^d(t) - v(t) \left(n - \hat{l}(t+h) \right) \right),$$

$$b(t+h) = b(t) + h \left(g + r(t) b(t) - \tau_c \left(\rho + \alpha_3 r(t) b(t) \right) - (\tau - \alpha_1) U(t) y(t) \right) + \\ - h b(t) \left(n - \hat{l}(t+h) + \hat{p}(t+h) \right),$$

$$r(t+h) = r(t) + h \left(-\beta_i \left(r(t) - r^o \right) + \beta_p \left(\hat{p}(t+h) - \bar{\pi} \right) + \beta_u \left(u(t) - \bar{u} \right) \right),$$

gdzie:

$$\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p} = \text{const}, \quad \hat{p}(t+h) = \kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(V(t) - \bar{V} \right) + \beta_p \left(u(t) - \bar{u} \right) \right) + \pi^e,$$

$$V(t) = \frac{y(t)}{l(t)}, \quad u = \frac{y(t)}{y^p}, \quad \rho^e = (1 - \tau_p) y^e(t) - (1 + \tau_1) U(t) y(t) - \delta,$$

$$\alpha_4 = 1 - \tau_p + \frac{\tau_p}{\tau_c} = \text{const}, \quad \rho = (1 - \tau_p) y^d(t) - (1 + \tau_1) U(t) y(t) - \delta$$

oraz

$$y^d(t) = (1 + \alpha_1 - \tau) y(t) U(t) + i_1 \left(\rho^e(t) - \xi - \left(r(t) - \pi^e(t) \right) \right) + i_2 \left(u(t) - \bar{u} \right) + \delta + g + \\ + \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(V(t) - \bar{V} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(u(t) - \bar{u} \right) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right),$$

$$y(t) = y^e(t) + \beta_n \beta_{N^d} y^e(t) - \beta_n v(t) + \\ + y^e \beta_z \left(\kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(V(t) - \bar{V} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(u(t) - \bar{u} \right) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) \right).$$

Podobnie jak w poprzednich symulacjach komputerowych, do rozpoczęcia analizy potrzebny jest stan początkowy, który wyznaczamy analogicznie do punktu 4.3.1, wykorzystując dane o polskiej gospodarce za rok 2018 (tabela 4.1). Zmienne i ich wartości przedstawiono w tabeli 4.14.

Tabela 4.14. Wartości zmiennych w stanie początkowym modelu KMG

Nazwa zmiennej	Wzór zmiennej	Wartość zmiennej w stanie początkowym
Udział płac w PKB	$U(0) = \frac{\omega(0)L(0)}{Y(0)}$	$U(0) = \bar{U} = 0,48$
Pracochłonność pełnego zatrudnienia	$l(0) = \frac{x(0)L(0)}{K(0)}$	$l(0) = \bar{l} = 0,56$
Oczekiwana inflacja	$\pi^e(0)$	$\pi^e(0) = \bar{\pi} = 0$
Oczekiwana sprzedaż na jednostkę kapitału	$y^e(0) = \frac{Y^e(0)}{K(0)} = \frac{Y^d(0)}{K(0)}$	$y^e(0) = \bar{y}^e = 0,52$
Wielkość zapasów na jednostkę kapitału	$v(0) = \frac{N(0)}{K(0)}$	$v(0) = \bar{v} = 0,05$
Stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału	$b(0) = \frac{B(0)}{p(0)K(0)}$	$b(0) = \bar{b} = 0,26$
Konsumpcja sektora prywatnego na jednostkę kapitału	$c(0) = \frac{C(0)}{K(0)}$	$c(0) = \bar{c} = 0,3$
Produkcja na jednostkę kapitału	$y(0) = \frac{Y(0)}{K(0)}$	$y(0) = \bar{y} = 0,53$
Popyt na jednostkę kapitału	$y^d(0) = \frac{Y^d(0)}{K(0)}$	$y^d(0) = \bar{y}^d = 0,52$

W kolejnym kroku wyznaczamy wartości parametrów modelu. W tym celu korzystamy z założenia, że gospodarka opisana modelem KMG znajduje się na ścieżce równomiernego wzrostu, czyli stan początkowy jest jednocześnie stanem stacjonarnym.

Żeby stan początkowy był jednocześnie stanem stacjonarnym, musimy dobrać odpowiednie wartości parametrów modelu, to znaczy spełniające układ równań:

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1 + \alpha_1 - \tau)\bar{y}}, \quad (4.4.1)$$

$$\bar{l} = \frac{\bar{u}y^p}{\bar{v}}, \quad (4.4.2)$$

$$\bar{y}^e = \bar{y}^d = \gamma\bar{u}y^p, \quad (4.4.3)$$

$$u = \bar{u}, \quad (4.4.4)$$

$$\bar{\pi} = \mu - n, \quad (4.4.5)$$

$$\bar{v} = (1 - \gamma) \frac{\bar{u}y^p}{n} = \frac{\bar{y} - \bar{y}^d}{n}, \quad (4.4.6)$$

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c (\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{y} - \delta) - (\tau - \alpha_1) \bar{U} \bar{y}}{\alpha_3 \tau_c \bar{r} - \bar{r} + \mu}, \quad (4.4.7)$$

$$\bar{\rho}^e = \bar{\rho} = (1 - \tau_p) \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{y} - \delta, \quad (4.4.8)$$

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{\pi} - \xi, \quad (4.4.9)$$

$$\bar{c} = \bar{y}^d - (n + \delta + g), \quad (4.4.10)$$

$$V = \bar{V}, \quad (4.4.11)$$

$$\bar{y} = \bar{u}y^p, \quad y^p = \text{const}, \quad (4.4.12)$$

gdzie $\gamma = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n}$.

Do równań (4.4.1)–(4.4.12) podstawiamy wartości zmiennych w stanie początkowym, korzystając z tabeli 4.5, a zatem wartości, które stosowaliśmy w poprzednich eksperymentach symulacyjnych.

Po podstawieniu danych do równania (4.4.1) mamy:

$$0,49 = \frac{0,3}{(1 + \alpha_1 - \tau) \cdot 0,52}.$$

Zatem $(1 + \alpha_1 - \tau) = 1,2$, czyli parametry α_1, τ muszą spełniać równanie:

$$\alpha_1 - \tau = 0,2.$$

Korzystając z wyznaczonej wcześniej w punkcie 4.1.3 wartości parametru $\alpha_1 = 0,42$, możemy z tego wzoru wyznaczyć stawkę podatkową τ :

$$\tau = 0,22.$$

Z równania $\bar{y}^d = \gamma \bar{y}$, w którym znamy wartości $\bar{y}^d$ i $\bar{y}$ (tabela 4.11), wyznaczamy wartość parametru γ :

$$\gamma = \frac{\bar{y}^d}{\bar{y}} = 0,9811.$$

Znając wartości zmiennych: $\bar{r}$, $\bar{\rho}$, $\bar{\pi}$, $\bar{m}$, $\bar{y}^e$ (tabela 4.11) oraz wartości parametrów: $n = 0,03$, $g = G/K = 0,9$ (tabela 4.2), wyznaczamy kolejno:

- z równania (4.4.10) wartość parametru δ :

$$\delta = \bar{y}^d - n - \bar{c} - g = 0,1.$$

- z równania (4.4.9) wartość parametru ξ :

$$\xi = \bar{\rho} + \bar{\pi} - \bar{r} = 0,11,$$

gdzie $\bar{\rho} = \bar{y}^d - \bar{U} \bar{y} - \delta$.

Znając wartość $\bar{\pi}$ aktualnej inflacji w stanie stacjonarnym oraz stopę wzrostu wydajności pracy n , z równania $\bar{\pi} = \mu - n$ możemy wyznaczyć wartość stopy wzrostu podaży pieniądza μ :

$$\mu = \bar{\pi} + n = 0,05.$$

Jeśli założymy, że wartości parametrów $\bar{u}$ i $\bar{V}$ są takie jak w poprzednich symulacjach (tabela 4.2), to wartość parametru y^p otrzymujemy z równania $\bar{y} = \bar{u}y^p$:

$$y^p = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = 0,65.$$

Jednym z mankamentów kalibracji parametrów modelu w omawianej w tym punkcie symulacji jest wartości zmiennej v (stosunek zapasów do kapitału trwałego). Obliczając wartość tej zmiennej na podstawie jej definicji, tzn. $v(0) = N(0)/K(0)$, gdzie $N(0)$ to poziom zapasów w 2018 roku, a $K(0)$ to wartość kapitału trwałego w 2018 roku, otrzymujemy $v(0) = 0,09$ (zob. tabela 4.9, dane GUS za rok 2018). Z drugiej strony, jeśli podstawimy wartości zmiennych do równania zmiennej v w stanie stacjonarnym $\bar{v} = (1 - \gamma) \frac{\bar{u}y^p}{n} = \frac{\bar{y} - \bar{y}^d}{n}$, to otrzymujemy $\bar{v} = 0,3$. Zakładając, że wartości zmiennych w stanie początkowym są równe wartościom tych zmiennych w stanie stacjonarnym ($v(0) = v$), otrzymujemy sprzeczność. Ta sprzeczność może sugerować, że gospodarka opisana za pomocą modelu KMGT nie znajduje się na ścieżce równomiernego wzrostu⁵⁷.

Rozwiązaniem tego problemu, to znaczy doбором takich wartości odpowiednich parametrów, aby gospodarka znajdowała się na początku analizowanego okresu na ścieżce równomiernego wzrostu, jest albo przyjęcie odpowiedniej wielkości n (stopa wzrostu wydajności pracy), aby spełnione było równie $v(0) = \frac{\bar{y} - \bar{y}^d}{n}$, albo wyznaczenie wielkości $N(0)$ ze wzoru:

⁵⁷ Z danych oraz z równań modelu wynika, że gospodarka polska w 2018 roku nie była na ścieżce równomiernego wzrostu, jednak dla potrzeb analizy wpływu szoków zewnętrznych dokonujemy takiej korekty wartości niektórych parametrów, aby tę ścieżkę równomiernego wzrostu mieć dla gospodarki na początku analizowanego okresu.

$$N(0) = \bar{v} \cdot K(0),$$

gdzie $\bar{v} = \frac{\bar{y} - \bar{y}^d}{n} = 0,3$.

Jeśli wybierzemy pierwsze rozwiązanie, to $n = 0,1$, co oznacza, że gospodarka rośnie ze stopą wzrostu równą 0,1. W wypadku wyboru drugiego rozwiązania otrzymujemy $N(0) = 0,3 \cdot K(0)$, co oznacza, że poziom zapasów w stanie początkowym stanowi 30% kapitału trwałego (około 60% PKB). Oba rozwiązania są odległe od rzeczywistości. Z danych GUS wynika, że zapasy stanowią około 10% PKB, a stopa wzrostu PKB w 2018 roku była równa około 5%.

Pierwsze rozwiązanie wpływa na wartości innych wcześniej obliczonych parametrów modelu, m.in. na stopę wzrostu podaży pieniądza (dla $n = 0,2$ stopa ta byłaby ujemna). Drugie rozwiązanie wpłynie jedynie na wartości trzech parametrów reakcji: β_{N^d} , β_n oraz β_z . Drugie rozwiązanie jest więc lepsze i dlatego wybieramy je do dalszych obliczeń i symulacji komputerowych.

Wartość parametru reakcji β_{N^d} wyznaczamy, korzystając z równania modelu $N(0) = \beta_{N^d} Y^e(0)$:

$$\beta_{N^d} = \frac{N(0)}{Y^e(0)} = \frac{v \cdot K(0)}{Y^e(0)} = \frac{\bar{v}}{y^e(0)} = 0,64.$$

Z kolei wartości parametrów reakcji β_n i β_z są rozwiązaniem równania:

$$\gamma = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n},$$

w którym znamy wielkości γ , n oraz β_{N^d} . Rozwiązanie równania, które jest parą liczb (β_n, β_z) , ustalono za pomocą Solvera.

Ostatnim krokiem jest wyznaczanie wysokości stawki podatkowej τ_c . Stawkę tę obliczamy za pomocą równania:

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c (\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{y} - \delta) - (\tau - \alpha_1) \bar{U} \bar{y}}{\alpha_3 \tau_c \bar{r} - \bar{r} + \mu},$$

gdzie $\bar{b}$, g , τ , τ_1 , n , δ , ξ , β_{N^d} , $\bar{U}$, α_4 oraz α_3 znamy. Na podstawie powyższego równania mamy:

$$\tau_c = 0,82.$$

Wartość stawki podatkowej τ_c jest bardzo duża, co razem z wartością zmiennej określającej poziom zapasów w stanie początkowym potwierdza, że polska gospodarka w 2018 roku nie znajdowała się na wynikającej z równań modelu KMG T ścieżce równomiernego wzrostu.

Ostatecznie otrzymujemy zestaw wartości parametrów przedstawiony w tabeli 4.15.

Tabela 4.15. Wartości parametrów modelu KMGT w symulacjach szoków zewnętrznych

Parametr	Wartość	Parametr	Wartość	Parametr	Wartość	Parametr	Wartość
κ_w	0,30	β_{y^e}	0,05	α_1	0,42	ξ	0,11
κ_p	0,80	β_w	0,40	τ_p	0,07	r^o	0,03
β_n	0,10	i_1	2,00	α_3	0,73	τ_c	0,82
β_{π^e}	0,10	i_2	0,10	α_4	1,02	τ	0,24
β_{N^d}	0,64	y^p	0,65	τ_1	0,07	n	0,03
β_z	0,64	$\bar{u}$	0,81	δ	0,09	μ	0,05
β_p	0,60	$\bar{V}$	0,94	g	0,10		

Źródło: obliczenia własne.

4.4.3. Analiza wpływu szoków zewnętrznych

W punkcie tym przedstawiono empiryczną analizę wpływu szoków zewnętrznych na funkcjonowanie gospodarki znajdującej się na ścieżce równomiernego wzrostu z wykorzystaniem zaprezentowanego w punkcie 4.4.2 zmodyfikowanego modelu KMGT. Analizę przeprowadzono, przyjmując trzy różne zestawy wartości parametrów reakcji (tabela 4.16) odpowiadające trzem scenariuszom polityki pieniężnej. Parametry te występują w równaniu dynamiki nominalnej stopy procentowej:

$$\dot{r} = -\beta_{i_r}(r - r^o) + \beta_{i_p}(\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u}(u - \bar{u}). \quad (4.4.13)$$

Równanie (4.4.13) oraz zestawy wartości parametrów reakcji (tabela 4.16) dokładnie omówiliśmy w punkcie 4.3.3. Zestawy wartości parametrów 1, 2 oraz 3 reprezentują trzy scenariusze polityki pieniężnej⁵⁸, w której bank centralny z różną siłą reaguje na odchylenia od założonych przez siebie celów. Zestaw 3 jest zestawem podstawowym. Zestaw 1 ma wszystkie parametry reakcji pięciokrotnie mniejsze od zestawu 3, a zestaw 2 pięciokrotnie większe. A więc najsłabsze reakcje banku

⁵⁸ Gospodarka jest taka sama w każdym scenariuszu, co więcej, charakteryzuje się podobnymi cechami. Różnią się reakcje banku centralnego, które następnie przekładają się na reakcję gospodarki.

Tabela 4.16. Zestawy wartości parametrów reakcji równania dynamiki nominalnej stopy procentowej (4.4.13)

Parametr	Zestaw 1	Zestaw 2	Zestaw 3
β_{i_r}	0,04	1	0,2
β_{i_p}	0,04	1	0,2
β_{i_u}	0,002	0,05	0,01

Źródło: obliczenia własne.

centralnego opisane są zestawem 1, a najsilniejsze zestawem 2. Wartości pozostałych parametrów oraz wartości początkowe zmiennych modelu w postaci intensywnej przyjęliśmy takie jak w tabelach 4.14 i 4.15 i są jednakowe dla trzech scenariuszy polityki pieniężnej.

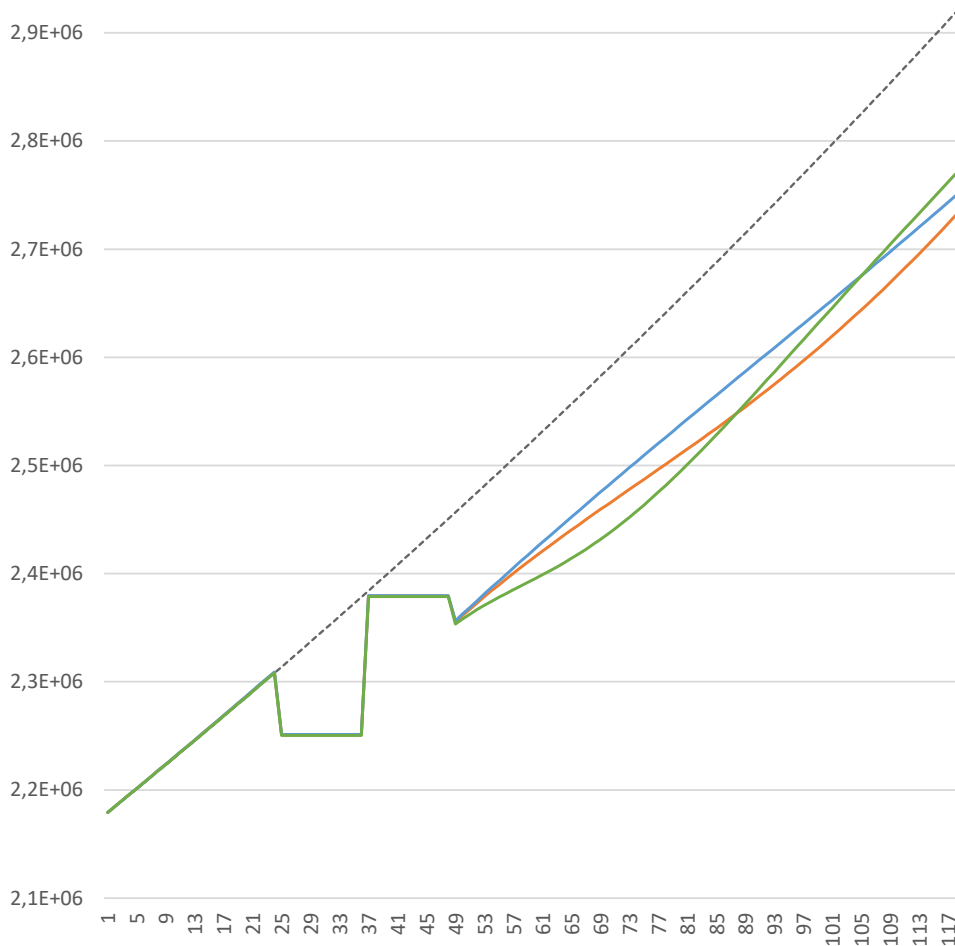
Przed rozpoczęciem analizy wyników symulacji należy wspomnieć, że na wszystkich wykresach czas, przedstawiony na osi odciętych, jest mierzony w miesiącach (np. $t = 120$ oznacza 120 miesięcy, czyli 10 lat). Na rysunkach 4.26 i 4.27 przedstawiono wykresy wybranych zmiennych modelu dla zestawów wartości parametrów reakcji 1, 2 oraz 3 z tabeli 4.16. Na każdym z rysunków linią przerywaną zaznaczono ścieżkę równomiernego wzrostu, na której byłaby trajektoria prezentowanej zmiennej, gdyby nie nastąpił kryzys gospodarczy.

Reakcją banku centralnego na kryzys gospodarczy związany m.in. z wysoką inflacją (powyżej celu inflacyjnego) jest podniesienie nominalnej stopy procentowej. W scenariusz opisanym zestawem 1 wzrost nominalnej stopy procentowej jest najniższy. Natomiast w scenariuszu 2 bank centralny bardzo szybko podnosi stopę procentową, a ponadto, w porównaniu z pozostałymi scenariuszami, podnosi ją najwyżej. Efektem podnoszenia nominalnej stopy procentowej we wszystkich trzech analizowanych przez nas przypadkach jest zahamowanie wzrostu popytu (popyt w stosunku do PKB maleje), którego główną przyczyną jest zahamowanie wzrostu konsumpcji prywatnej (konsumpcja do PKB maleje, inwestycje do PKB bez znaczących zmian – rysunek 4.26, natomiast PKB rośnie ze stałą stopą wzrostu – rysunek 4.27). Zmniejszenie popytu doprowadza do zmniejszenia wzrostu produkcji (rysunek 4.27), a w konsekwencji zmniejszenia wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej. Dodatkowo po kryzysie stopa wzrostu wydajności pracy $\hat{x}$ wraca do poziomu $n = 0,03$ (w czasie kryzysu zakładaliśmy $n = -0,025$), czego konsekwencją jest spadek stopy zatrudniania V w wyniku wzrostu wydajności pracy (wynika to z założenia: $Y = xL^d$ oraz $V = L^d/L$, $L = \text{const}$). Zmniejszenie stopy zatrudnienia oraz wskaźnika mocy produkcyjnej implikuje spadek inflacji. Opóźniona reakcja banku centralnego w scenariuszu opisanym zestawem 1 wydłuża opisany proces walki z wysoką inflacją, co ilustrują niebieskie wykresy na rysunku 4.26. W wypadku scenariusza, w którym bank centralny najszybciej reaguje na odchylenia od założo-



Rysunek 4.26. Dynamika wybranych zmiennych modelu KMGT dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji: β_r , β_p oraz β_u . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: niebieskie dla $\beta_r = \beta_p = 0,04$, $\beta_u = 0,02$ (zestaw 1), zielone dla $\beta_r = \beta_p = 1$, $\beta_u = 0,05$ (zestaw 2), pomarańczowe dla $\beta_r = \beta_p = 0,02$, $\beta_u = 0,01$ (zestaw 3)

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 4.27. Dynamika PKB. Trajektorie PKB dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji β_i , β_p oraz β_u ; kolor niebieski dla $\beta_i = \beta_p = 0,04$, $\beta_u = 0,002$ (zestaw 1), zielony dla $\beta_i = \beta_p = 1$, $\beta_u = 0,05$ (zestaw 2), pomarańczowy dla $\beta_i = \beta_p = 0,2$, $\beta_u = 0,01$ (zestaw 3)

Źródło: obliczenia własne.

nych celów (zestaw 2), gospodarka najszybciej wraca do równomiernego wzrostu. Kosztem silnej i szybkiej reakcji banku centralnego jest gwałtowny spadek popytu, co ilustruje zielony wykres zmiennej opisującej stosunek popytu do PKB. Jednak w kolejnych okresach popyt w gospodarce w wypadku scenariusza 2 bardzo szybko rośnie i wraca do poziomu przed kryzysem gospodarczym. Natomiast w scenariuszu 1, w którym bank centralny słabo reaguje na odchylenia od założonych celów, możemy zaobserwować dłuższy czas powrotu gospodarki do stanu stacjonarnego oraz pojawienie się cykli. W takiej sytuacji gospodarka, wychodząc z jednego kry-

zysu, wchodzi w kolejny, w którym boryka się z rozłożonym w czasie niskim popytem oraz deflacją cen.

Na koniec przedstawiono, jak po kryzysie zachowuje się produkcja (rysunek 4.27). W scenariuszu opisanym zestawem 2 podczas walki z kryzysem produkcja jest dużo niższa niż w wypadku dwóch pozostałych scenariuszy. Spowodowane jest to gwałtownym spadkiem popytu, w dużej mierze wynikającym ze spadku konsumpcji sektora prywatnego. Można jednak zaobserwować, że po około 65 okresach (po około dwóch latach od końca kryzysu) produkcja w gospodarce w scenariuszu opisanym zestawem 2 przyspiesza i od 90. okresu (po około 3,5 roku) jest wyższa niż w scenariuszach 1 oraz 3.

4.4.4. Podsumowanie

Wyniki symulacji kryzysu gospodarczego wykazały, że polityka pieniężna ma znaczenie w walce z kryzysem gospodarczym. Szybkie i odważne decyzje podejmowane przez bank centralny, choć w początkowych okresach są dotkliwe dla gospodarki, to w późniejszych okresach pozwalają relatywnie szybko wrócić na ścieżkę równomiernego wzrostu, na której gospodarka znajdowała się przed kryzysem gospodarczym.

Zakończenie

Modele zaprezentowane w monografii są modyfikacjami wcześniejszych keynesowskich monetarnych modeli wzrostu gospodarczego typu Keynesa–Metzlera–Goodwina (KMG), które były przedmiotem wieloletnich badań prowadzonych głównie przez Carla Chiarelłę, Petera Flaschela i Williego Semmlera we współpracy z innymi autorami. Wspomniani autorzy znacząco przyczynili się do rozwoju keynesowskiej makroekonomii monetarnej.

Modele te opisują gospodarkę za pomocą złożonych układów równań różniczkowych i są najbardziej zaawansowanymi teoretycznymi modelami ekonomii keynesowskiej. Do głównych osiągnięć wspomnianych wyżej autorów należy udowodnienie twierdzeń o stabilności analizowanych modeli mówiących o zdolności gospodarki do zbieżności z upływem czasu do ścieżki równomiernego wzrostu. Ze względu na rozmiary i stopień skomplikowania badanych modeli było to zadaniem bardzo trudnym. Dlatego też, aby osiągnąć założony cel, musieli w wielu miejscach modeli dokonywać silnych uproszczeń kosztem realizmu ekonomicznego.

Pierwszym celem niniejszej monografii było opracowanie dwóch nowych wersji modelu KMG poprzez wprowadzenie takich modyfikacji ich równań, aby usunąć uproszczenia budzące największe wątpliwości. Wprowadzone modyfikacje pogłębiają istniejące relacje między zmiennymi modelu. W wyniku modyfikacji równań efekt Keynesa i efekt Rose'a, w zależności od wartości parametrów reakcji, jest dodatkowo osłabiony lub wzmocniony, a efekt Metzlera jest wzmocniony, niezależnie od wartości parametrów reakcji. Modyfikacje doprowadziły też do pojawienia się nowych sprzężeń zwrotnych w modelu, zwiększając tym samym jego złożoność. Do najważniejszych nowych sprzężeń zwrotnych, które zostały omówione w rozdziale pierwszym, zaliczamy efekt wzrostu oczekiwanego popytu oraz efekt wzrostu płacy realnej.

Modyfikacje zostały przeprowadzone w taki sposób, aby możliwe było sprowadzenie obu modeli do tzw. postaci intensywnej, w której zmiennymi stają się proporcje między zmiennymi modeli wyjściowych. Uzyskanie modeli w postaci intensywnej było warunkiem koniecznym do realizacji drugiego celu monografii, którym było wyznaczenie tzw. stanów stacjonarnych modeli, a tym samym odpowiadającym im ścieżek równomiernego wzrostu.

Wprowadzone modyfikacje są szczególnie widoczne we wzorach opisujących wartości zmiennych w stanie stacjonarnym modelu. Wzory te pokazują m.in., jak

stawki podatkowe wpływają na wartości takich zmiennych w stanie stacjonarnym jak stopa procentowa, realny dochód z pracy na jednostkę produkcji czy stosunek realnej wartości obligacji do kapitału rzeczowego. Zależności takich nie ma w oryginalnych wersjach modeli KMG, analizowanych przez Chiarellę i in., gdyż w ich wersjach modeli stawki podatkowe w ogóle nie są rozpatrywane.

Sprowadzenie modeli do postaci intensywnej otworzyło drogę do uzyskania najważniejszych teoretycznych rezultatów monografii, którymi są dowody lokalnej asymptotycznej stabilności obu zmodyfikowanych modeli przedstawione w rozdziale trzecim. Ze względu na wprowadzone modyfikacje dowody te, chociaż oparte na ogólnej idei kaskady macierzy stabilnych (*cascade of stable matrices approach*) pochodzącej z prac Chiarelli i in., to przebiegają inaczej, gdyż inne są postacie analizowanej w tych dowodach macierzy Jacobiego. Inne też, w porównaniu z pracami Chiarelli i in., są założenia o parametrach modeli wykorzystywane w dowodach stabilności.

Kolejnym etapem monografii było przeprowadzenie symulacji komputerowych na podstawie danych statystycznych o polskiej gospodarce. Wyniki tych symulacji zostały zaprezentowane w rozdziale czwartym. Najważniejszym wynikającym z nich wnioskiem jest to, że nawet dla dużych zakresów wartości parametrów stan stacjonarny modelu KMG i modelu KMGT jest lokalnie asymptotycznie stabilny, co jest empirycznym potwierdzeniem prawdziwości twierdzeń udowodnionych w rozdziale trzecim. Czas dojścia gospodarki do ścieżki równomiernego wzrostu jest bardzo długi, sięga ponad 100 lat. Przyczyna prawdopodobnie leży w bardzo dużym stopniu złożoności modelu – wielokierunkowych zależnościach między dużą liczbą jego zmiennych. Ich wzajemne dopasowanie się do siebie i ukształtowanie proporcji między nimi umożliwiającymi równomierny wzrost wymaga dużo czasu. Nie jest też tak, że gospodarka zmierza wprost ku ścieżce równomiernego wzrostu, gdyż w całym horyzoncie czasowym na procesy wzrostu nakładają się procesy wolno gasnących fluktuacji. Niemniej także w relatywnie krótszych, bardziej realistycznych horyzontach czasowych widoczny jest ogólny kierunek przemian strukturalnych w gospodarce, którym są proporcje między zmiennymi w stanie stacjonarnym umożliwiające równomierny wzrost gospodarki.

Ostatnim etapem analizy empirycznej badanego modelu była symulacja kryzysu gospodarczego poprzez wprowadzenie do modelu KMGT szoków zewnętrznych odzwierciedlających kryzys związany z pandemią wirusa SARS-CoV-2. Główne wyniki tej analizy wskazują przede wszystkim, że odpowiednia modyfikacja modelu KMGT umożliwia analizę wpływu szoków zewnętrznych, a ponadto, że właściwa polityka pieniężna pozwala gospodarce relatywnie szybko wrócić na ścieżkę równomiernego wzrostu, na której znajdowała się przed kryzysem gospodarczym.

Przedstawione wyniki monografii nie wyczerpują wyzwań badawczych, które warto byłoby podjąć na kolejnych etapach. Wśród kluczowych zagadnień wartych zainteresowania, które prawdopodobnie będą wyznaczać kierunki dalszych badań w omawianym obszarze, można wymienić m.in.:

-
- uwzględnienie oszczędności pracowników najemnych w równaniu konsumpcji prywatnej,
 - uwzględnienie konsumpcji właścicieli kapitału,
 - wprowadzenie możliwości zakupu obligacji przez pracowników najemnych,
 - rozszerzenie modelu o kredyt konsumpcyjny,
 - przeprowadzenie symulacji komputerowych dla nowych wersji modelu KMG,
 - wykorzystanie zaawansowanych metod ekonometrycznych do wyznaczenia parametrów reakcji modelu.

Bibliografia

- Acemoglu, D. (2009). *Introduction to modern economic growth*. Princeton University Press.
- Araujo, R., Flaschel, P. i Moreira, H. (2020). Limit cycles in a model of supply-side liquidity/profit-rate in the presence of a Phillips curve. *Economia*, 21(2), 145-159. <https://doi.org/10.1016/j.econ.2019.09.003>
- Asada, T. (1991). On a mixed competitive-monopolistic macrodynamic model in a monetary economy. *Journal of Economics*, 54(1), 33-53. <https://www.jstor.org/stable/41794144>
- Asada, T. (2012). Modeling financial instability. *Intervention: European Journal of Economics and Economic Policies*, 9, 215-232. <https://doi.org/10.4337/ejeep.2012.02.06>
- Asada, T., Chiarella, C., Flaschel, P. i Franke, F. (2003). *Open economy macrodynamics*. Springer.
- Asada, T., Demetrian, M. i Zimka, R. (2018). On dynamics in a Keynesian model of monetary and fiscal policy with debt effect. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 58, 131-146. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.06.013>
- Asada, T., Demetrian, M. i Zimka, R. (2019). On dynamics in a Keynesian model of monetary and fiscal stabilization policy mix with twin debt accumulation. *Metroeconomica*, 70(3), 365-383. <https://doi.org/10.1111/meca.12220>
- Barro, R. J. i Sala-i-Martin, X. (1995). *Economic growth*. McGraw Hill.
- Baranowski, P. (2008). Reguła Taylora i jej rozszerzenia. *Gospodarka Narodowa*, 7-8, 1-23.
- Baranowski, P. (2014). *Reguły polityki pieniężnej w Polsce*. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.
- Barbarosa, F. (2018). *Macroeconomic theory*, Springer.
- Bassi, F. (2019). *Capacity utilization and the NAIRCU*. CEPN Working Papers, hal-02360456. <https://hal.science/hal-02360456v1>
- Begg, D., Fischer, S. i Dornbusch R. (2000). *Ekonomia. Makroekonomia*. PWE.
- Białowolski, P. (2005). Produkt potencjalny w Polsce w latach 1993-2004 na podstawie funkcji produkcji. *Gospodarka Narodowa*, 5-6, 37-48.
- Brems, H. (1980). Inflation, interest, and growth. D. C. Heath.
- Brock, W. A. (1974). Money and growth: The case of long run perfect foresight. *International Economic Review*, 15(3), 750-777. <https://doi.org/10.2307/2525739>
- Brzoza-Brzezina, M. (2003). Zagadnienie naturalnej stopy procentowej. *Ekonomista*, 4, 457-477.
- Bullard, J. i Mitra, K. (2002). Learning about monetary policy rules. *Journal of Monetary Economics*, Elsevier, 49(6), 1105-1129.
- Business Insider Polska. (2022, 1 maja). *Jak wygląda współczesny cykl koniunkturalny?*. <https://businessinsider.com.pl/gospodarka/makroekonomia/cykl-koniunkturalny-definicja-zastosowanie-okres-trwania/llbpk9f>

- Cagan, P. (1956). The monetary dynamics of hyper-inflation. W: M. Friedman (Ed.), *Studies in the quantity of money* (s. 25-117). University of Chicago Press.
- Charpe, M., Chiarella, C., Flaschel, P. i Semmler, W. (2011). *Financial assets, debt and liquidity crises: A Keynesian approach*. Cambridge University Press.
- Chiarella, C. i Flaschel, P. (1996). Real and monetary cycles in models of Keynes-Wicksell type. *Journal of Economic Behaviour and Organization*, 30, 327-351. [https://doi.org/10.1016/S0167-2681\(96\)00873-6](https://doi.org/10.1016/S0167-2681(96)00873-6)
- Chiarella, C. i Flaschel, P. (2000). *The dynamics of Keynesian monetary growth*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511492396>
- Chiarella, C., Flaschel, P. i Franke, R. (2005). *Foundations for a disequilibrium theory of the business cycle. Qualitative analysis and quantitative assessment*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511492402>
- Chiarella, C., Flaschel, P., Franke, R., Araujo, R., Charpe, M., Proano, Ch. i Szczutkowski, A. (2021). *Unbalanced growth from a balanced perspective*, Edward Elgar.
- Chiarella, C., Flaschel, P., Franke, R. i Semmler, W. (2002). *Stability analysis of a high-dimensional macrodynamic model of real-financial interaction: A cascade of matrices approach*. Working Paper Series 123. Finance Discipline Group, UTS Business School, University of Technology, Sydney.
- Chiarella, C., Flaschel, P., Franke, R. i Semmler, W. (2006). A high-dimensional model of real-financial market interaction: The cascade of stable matrices approach. W: C. Chiarella, R. Franke, P. Flaschel i W. Semmler (Eds.), *Quantitative and empirical analysis of nonlinear dynamic macromodels, contributions to economic analysis* (s. 359-384), Elsevier. [https://doi.org/10.1016/S0573-8555\(05\)77011-5](https://doi.org/10.1016/S0573-8555(05)77011-5)
- Chiarella, C., Flaschel, P., Groh, G. i Semmler, W. (2000). *Disequilibrium, growth and labor market dynamics*. Springer.
- Chiarella, C., Flaschel, P. i Semmler, W. (2012). *Reconstructing Keynesian macroeconomics*, t. 1: *Partial perspectives*. Routledge.
- Chiarella, C., Flaschel, P. i Semmler, W. (2013). *Reconstructing Keynesian macroeconomics*, t. 2: *Integrated Approaches*. Routledge.
- Chiarella, C., Flaschel, P. i Semmler, W. (2014). *Reconstructing Keynesian macroeconomics*, t. 3: *Macroeconomic activity, banking and financial markets*. Routledge.
- Coenen, G. (2003). *Downward nominal wage rigidity and the long-run Phillips curve: Simulation based evidence for the Euro area*. ECB Working Paper.
- Dimand, R. W. (2014). *James Tobin and modern money theory*. CHOPE Working Paper, 2014-05. Duke University, Center for the History of Political Economy (CHOPE). <https://hdl.handle.net/10419/149717>
- Dimand, R. W. i Durlauf, S. N. (2009). James Tobin and growth theory: Financial factors and long-run growth. *History of Political Economy*, 41 (Suppl. 1), 182-199. <https://doi.org/10.1215/00182702-2009-023>
- Domar, E. D. (1946). Capital expansion, rate of growth, and employment. *Econometrica*, 14(2), 137-147. <https://doi.org/10.2307/1905364>
- Dornbusch, R. i Frenkel, J. A. (1973). Inflation and growth: Alternative approaches. *Journal of Money, Credit and Banking*, 5(1), 141-156. <https://doi.org/10.2307/1991068>
- Dutt, A. K. (2012). Distributional dynamics in Post Keynesian growth models. *Journal of Post Keynesian Economics*, 34(3), 431-451. <https://www.jstor.org/stable/23119480>

- Dumenil, G. i Levy, D. (1991). Micro adjustment toward long-term equilibrium. *Journal of Economic Theory*, 52(2), 369-395.
- Esfahani, H. S. i Kim, H. J. (2002). *Hiding Public Debt*. Economic Research Forum Working Papers, 0203.
- Eurostat. (2011). Technical Compilation Guide for Pension Data in National Accounts. <https://doi.org/10.2785/217>
- Fair, R. (1997a). *Testing the NAIRU model for the United States*. Yale University, mimeo.
- Fair, R. (1997b). *Testing the NAIRU model for 27 countries*. Yale University, mimeo.
- Filipowicz, K., Misiak, T. i Tokarski, T. (2016). Bipolar growth model with investment flows. *Economics and Business Review*, 2(3), 32-56.
- Fischer, S. (1972). Keynes-Wicksell and neoclassical models of money and growth. *American Economic Review*, 62, 880-890.
- Fischer, S. (1974). Money and the production function. *Economic Inquiry*, 12(4), 517-533.
- Fischer, S. i Modigliani F. (1978). *Towards an understanding of the real effects and costs of inflation*. NBER Working Papers 0303, National Bureau of Economic Research, Inc. <http://www.nber.org/papers/w0303.pdf>
- Flaschel, P. (1993). *Macrodynamics. Income distribution, effective demand and cyclical growth*. Verlag Peter Lang.
- Flaschel, P. (2020). A baseline model of 'Social Protection' in open economies of the KMG variety. Bielefeld. <https://doi.org/10.4119/unibi/2942156>
- Franke, R. (1992). Stable, unstable, and cyclical behaviour in a Keynes-Wicksell monetary growth model. *Oxford Economic Papers*, 44(2), 242-256.
- Friedman, M. (1968). The role of monetary policy. *American Economic Review*, 58(1), 1-17. <https://www.jstor.org/stable/1831652>
- Fujino, A. (1974). *A neo-keynesian theory of inflation and economic growth*. Springer.
- Galbraith, J. K. (1997). Time to ditch the NAIRU. *Journal of Economic Perspectives*, 11(1), 93-108. <https://doi.org/10.1257/jep.11.1.93>
- Gandolfo, G. (2005). *Economic dynamics*. Springer.
- Gechert, S. i Heimberger, Ph. (2022). Do corporate tax cuts boost economic growth?. *European Economic Review*, 147. <https://doi.org/10.1016/j.eurocorev.2022.104157>
- Goodwin, R. M. (1967). A growth cycle. W: C. H. Feinstein (Ed.), *Socialism, capitalism and economic growth* (s. 54-58). Cambridge University Press.
- Grabia, T. (2014). Kontrowersje wokół koncepcji krzywej Phillipsa. *Gospodarka Narodowa. The Polish Journal of Economics*, 273(5), 5-28. <https://doi.org/10.33119/GN/100869>
- Groth, C. (1988). IS-LM dynamics and the hypothesis of adaptive-forward-looking expectations. W: P. Flaschel i M. Kruger (Eds.), *Recent approaches to economic dynamics: Conference Volume (Bielefeld, 7-9 October 1987)* (s. 251-266). Peter Lang.
- GUS. (2019). Rocznik Statystyczny RP 2019. Główny Urząd Statystyczny.
- GUS. (2021, 31 sierpnia). Uprawnienia emerytalno-rentowe gospodarstw domowych nabyte w ramach ubezpieczeń społecznych według stanu na dzień 31 grudnia 2018 r. <https://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/rachunki-narodowe/nabyte-uprawnienia-emerytalno-rentowe-w-ramach-ubezpiechen-spoecznych/uprawnienia-emerytalno-rentowe-gospodarstw-domowych-nabyte-w-ramach-ubezpiechen-spoecznych-wedlug-stanu-na-dzien-31-grudnia-2018-r,1,2.html>

- Harrod, R. F. (1939). An essays in dynamic theory. *The Economic Journal*, 49(193), 14-33. <http://www.jstor.org/stable/2225181>
- Harrod, R. F. (1942). *Toward a dynamic economic*. Macmillan.
- Iwai, K. (1981). *Disequilibrium dynamics: A Theoretical analysis of inflation*. Yale University Press.
- Johnson, H. G. (1966). The neoclassical one-sector growth model: A geometrical exposition and extension to a monetary economy. *Economica*, 33(131), 265-287. <https://doi.org/10.2307/2552404>
- Kaldor, N. (1971). *Eseje z teorii stabilizacji i wzrostu gospodarczego*. PWN.
- Keynes, J. M. (1936). *The general theory of employment, interest and money*. Macmillan.
- Kiedrowski, R. (2018). Profit rates equalization and balanced growth in a multi-sector model of classical competition. *Journal of Mathematical Economics*, 77, 39-53. <https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2018.05.002>
- Konopczyński, M. (2015). *Optymalna polityka fiskalna w gospodarce otwartej w świetle teorii endogenicznego wzrostu gospodarczego*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
- Lavoie, M. (2014). *Post-Keynesian economics: New foundations*. Edward Elgar.
- Lavoie, M. i Stockhammer, E. (2013). *Wage-led growth. An equitable strategy for economic recovery*. Palgrave Macmillan.
- Levhari, D. i Patinkin, D. (1968). The role of money in a simple growth model. *American Economic Review*, 58(4), 713-753. <http://www.jstor.org/stable/1815530>
- Łojasiewicz, S. (1988). *Wstęp do geometrii analitycznej zespolonej*. PWN.
- Mankiw, G. (2001). The inexorable and mysterious tradeoff between inflation and unemployment. *Economic Journal*, 111(471), C45-C61. <https://doi.org/10.1111/1468-0297.00619>
- McCandless, G. (2008). *The ABCs of RBCs. An introduction to dynamic macroeconomic models* (rozdział 12). Harvard University Press.
- Metzler, L. A. (1941). The nature and stability of inventory cycles. *Review of Economic Statistics*, 23(3), 113-129. <https://doi.org/10.2307/1927555>
- Microsoft. (b.r.). Definiowanie i rozwiązywanie problemów za pomocą dodatku Solver. <https://support.microsoft.com/pl-pl/office/definiowanie-i-rozwi%C4%85zywanie-problem%C3%B3w-za-pomoc%C4%85-dodatku-solver-5d1a388f-079d-43ac-a7eb-f63e45925040>
- Murakami, H. (2016). Alternative monetary policies and economic stability in a medium-term Keynesian model. *Evolutionary and Institutional Economics Review*, 13(2), 323-362. <https://doi.org/10.1007/s40844-016-0045-2>
- Murakami, H. (2018). Existence and uniqueness of growth cycles in post Keynesian systems. *Economic Modelling*, 75, 293-304. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2018.07.001>
- Murakami, H. (2020). Monetary policy in the unique growth cycle of post Keynesian systems. *Structural Change and Economic Dynamics*, 52(C), 39-49. <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2019.10.002>
- Nagatani, K. (1970). A note on Professor Tobin's money and economic growth. *Econometrica*, 38(1), 171-175. <https://doi.org/10.2307/1909249>
- Napoletano, M., Dosi, G., Fagiolo, G. i Roventini, A. (2012). Wage formation, investment behavior and growth regimes: An agent-based analysis. *Revue de L'OFCE*, 124(1), 235-261. <https://doi.org/10.3917/reof.124.0235>

- NBP. (b.r.a). O NBP. https://www.nbp.pl/home.aspx?f=/o_nbp/o_nbp.html
- NBP. (b.r.b). Archiwum podstawowych stóp procentowych NBP od 1998. <https://nbp.pl/podstawowe-stopy-procentowe-archiwum/>
- Novales, A., Fernandez, E. i Ruiz, J. (2009). *Economic growth: Theory and numerical solution methods*. Springer.
- Ogawa, S. (2019a). Dynamic analysis of a disequilibrium macroeconomic model with dual labor markets. *Metroeconomica*, 70(3), 525-550. <https://doi.org/10.1111/meca.12255>
- Ogawa, S. (2019b). *Effective demand and quantity constrained growth: A simple two sector disequilibrium approach*. MPRA Paper, 93336. <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/93336/>
- Ogawa, S. (2020). *Monetary growth with disequilibrium: A non-Walrasian baseline model*. MPRA Paper, 101236. University Library of Munich, Germany.
- Okun, A. (1971). The mirage of steady inflation. *Brooking Papers on Economic Activity*, 2(2), 485-498.
- Orphanides, A. i Solow, R. (1990). Money, inflation and growth. W: B. Friedman i F. Hahn (Eds.), *Handbook of monetary economics* (s. 223-261). North-Holland.
- Patinkin, D. (1965). *Money, interest, and prices: An integration of monetary and value theory*. Harper Row, New York.
- Panek, E. (2003). *Ekonomia matematyczna*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
- Piętak, Ł. (2017). Zrównoważony wzrost gospodarczy w teoriach i modelach wzrostu i rozwoju gospodarczego. *Gospodarka w Praktyce i Teorii*, 2(43), 51-77. <http://hdl.handle.net/11089/21053>
- Przybylska-Mazur, A. (2013). Reguły polityki pieniężnej a prognozowanie wskaźnika inflacji. *Studia Ekonomiczne*, 124, 233-244.
- Rodseth, A. (2000). *Open economy macroeconomics*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511754074>
- Romer, D. (1996). *Advanced macroeconomics*. McGraw-Hill.
- Rose, H. (1966). Unemployment in a theory of growth. *International Economic Review*, 7(3), 260-282. <https://doi.org/10.2307/2525525>
- Rose, H. (1967). On the non-linear theory of the employment cycle. *Review of Economic Studies*, 34(2), 153-173. <https://doi.org/10.2307/2296806>
- Rose, H. (1969). Real and monetary factors in the business cycle. *Journal of Money, Credit and Banking*, 1(2), 138-152.
- Rose, H. (1990). *Macroeconomic dynamics: A Marshallian synthesis*. Basil Blackwell.
- Sargent, T. (1987). *Macroeconomic theory* (2nd ed.). Academic Press.
- Sidrauski, M. (1967a). Rational choice and patterns of growth in a monetary economy. *American Economic Review Papers and Proceedings*, 57(2), 534-544.
- Sidrauski, M. (1967b). Inflation and economic growth. *Journal of Political Economy*, 75(6), 796-810.
- Sijben, J. (1977). *Money and economic growth*. Martinus Nijhoff.
- Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65-94. <https://doi.org/10.2307/1884513>
- Staiger, D., Stock, J. H. i Watson, M. W. (1997). The NAIRU, unemployment and monetary policy. *Journal of Economic Perspectives*, 11(1), 33-49. <https://doi.org/10.1257/jep.11.1.33>

- Stein, J. (1966). Money and capacity growth. *Journal of Political Economy*, 74(5), 451-465. <https://doi.org/10.1086/259199>
- Stein, J. (1968). Rational choice and the patterns of growth in a monetary economy: Comment. *American Economic Review*, 58(4), 944-950. <https://www.jstor.org/stable/1815555>
- Stein, J. (1969). „Neoclassical” and „Keynes-Wicksell” monetary growth models. *Journal of Money, Credit and Banking*, 1(2), 153-171.
- Stein, J. (1970). Monetary growth theory in perspective. *American Economic Review*, 60(1), 85-106. <https://www.jstor.org/stable/1807857>
- Stein, J. (1971). Money and capacity growth. Columbia University Press.
- Swan, T. W. (1956). Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, 32(2), 334-361.
- Taylor, J. B. (1993). Discretion versus policy rules in practice. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 39, 195-214. [https://doi.org/10.1016/0167-2231\(93\)90009-L](https://doi.org/10.1016/0167-2231(93)90009-L)
- Taylor, J. B. (1999). A historical analysis of monetary policy rules. W: J. B. Taylor (Ed.), *Monetary policy rules* (s. 319-348). University of Chicago Press.
- Taylor, J. B. (2015). A monetary policy for the future. W: O. Blanchard, R. G. Rajan, K. S. Rogoff i L. H. Summers (Eds.), *Progress and confusion: The state of macroeconomic policy* (s. 135-141), The MIT Press.
- Tokarski, T. (2005). *Wybrane modele podaŹowych czynników wzrostu gospodarczego*. Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.
- Tobin, J. (1955). A dynamic aggregative model. *Journal of Political Economy*, 63(2), 103-115. <https://www.jstor.org/stable/1827046>
- Tobin, J. (1965). Money and economic growth. *Econometrica*, 33(4), 671-684. <https://doi.org/10.2307/1910352>
- Trading Economics. (b.r.). Poland capacity utilization. <https://tradingeconomics.com/poland/capacity-utilization>
- Trzepla, M. (2007). Reguła Taylora - zastosowanie dla gospodarki polskiej. *Zeszyty Programu Top* 15, 1(1), 193-218.
- Turnovsky, S. J. (2000). *Methods of macroeconomic dynamics*. MIT.
- Turovsky, M. (2022, 24 maja). Capacity utilization - A simple guide. MRPeasy. <https://manufacturing-software-blog.mrpeasy.com/capacity-utilization/>
- Walsh, C. E. (1998). *Monetary theory and policy*. MIT.
- Wicksell, K. (1936). *Interest and prices: A Study of the causes regulating the value of money*, translated by Richard Kahn. McMillan.
- Winek, D. i Robak, S. (2003). *Naturalna stopa procentowa, luka PKB i inercja inflacyjna a wybór optymalnej stopy procentowej. Badania dla Polski 1992-2002*. Wyższa Szkoła Handlu i Finansów Międzynarodowych.
- Wojtyna, A. (2004). *Szkice o polityce pieniężnej*. Wydawnictwo Naukowe PWN.

Spis tabel

1.1. Kompletny układ równań modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza	37
1.2. Analiza wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany parametrów modelu	70
2.1. Model KMGT z kredytem inwestycyjnym	86
2.2. Analiza wrażliwości stanu równowagi modelu w postaci intensywnej.....	104
4.1. Dane roczne o polskiej gospodarce w 2018 roku	166
4.2. Podsumowanie wartości parametrów dla polskiej gospodarki w 2018 roku	172
4.3. Wartości parametrów reakcji obliczone za pomocą MS Excel – Solver.....	174
4.4. Porównanie zestawu parametrów reakcji 1 z zestawami 2, 3, 4 i 5.....	176
4.5. Wartości początkowe zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej	178
4.6. Porównanie wartości zmiennych modelu w stanie początkowym i w stanie stacjonarnym dla zestawów wartości parametrów 1, 2, 4 i 5.....	183
4.7. Porównanie wartości zmiennych modelu w stanie początkowym i w stanie stacjonarnym dla zestawu 3.....	184
4.8. Porównanie wartości zmiennych modelu wyrażonych na jednostkę PKB w stanie początkowym i w stanie stacjonarnym.....	185
4.9. Wpływ polityki fiskalnej na wartości zmiennych modelu KMG w stanie stacjonarnym	198
4.10. Równania modelu KMG z regułą Taylora w symulacjach komputerowych.....	213
4.11. Porównanie wartości zmiennych modelu KMGT w stanie początkowym i w stanie stacjonarnym	219
4.12. Dynamika wybranych kategorii makroekonomicznych w latach 2018–2021 (ceny stałe roku poprzedniego).....	227
4.13. Równania modelu KMG z regułą Taylora w czasie kryzysu gospodarczego i po kryzysie	230
4.14. Wartości zmiennych w stanie początkowym modelu KMGT	236
4.15. Wartości parametrów modelu KMGT w symulacjach szoków zewnętrznych	240
4.16. Zestawy wartości parametrów reakcji równania dynamiki nominalnej stopy procentowej (4.4.13).....	241

Spis rysunków

1.1. Efekt Keynesa w modelu KMG. Symbol * wskazuje dodatkowy kanał wpływu oczekiwanego popytu na produkcję występujący w nowej wersji modelu KMG	39
1.2. Efekt Rose'a. Symbolem * oznaczono występujące w nowej wersji modelu KMG dodatkowe kanały wpływu oczekiwanego popytu na popyt inwestycyjny	42
1.3. Proces Metzlera sprzedaży/regulacji zapasów – pętla 1. Symbolem * oznaczono dodatkowe kanały wpływu oczekiwanego popytu na produkcję przeznaczoną na zapasy oraz na całkowity realny popyt występujące w nowej wersji modelu KMG	45
1.4. Proces Metzlera sprzedaży/regulacji zapasów – pętla 2	45
1.5. Proces Metzlera sprzedaży/regulacji zapasów – pętla 3	46
1.6. Efekt Mundella	47
1.7. Efekt regresywnych oczekiwań	47
1.8. Efekt wzrostu oczekiwanego popytu	47
1.9. Efekt wzrostu płacy realnej	49
1.10. Schemat powiązań między zmiennymi w autorskiej wersji modelu KMG	49
2.1. Schemat udzielania kredytów w modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym	83
4.1. Oczekiwanie inflacyjne Polaków na tle inflacji w latach 2010–2022	171
4.2. Wartość zmiennej b w stanie stacjonarnym w zależności od stawki podatku τ_c	186
4.3. Dynamika zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej. Kolor niebieski – zestaw 1, kolor czerwony – zestaw 2, kolor czarny – zestaw 3	187
4.4. Trajektorie w przestrzeni fazowej otrzymane dla zestawu 2 wartości parametrów reakcji	190
4.5. Dynamika zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej dla zestawu 4	191
4.6. Trajektorie w przestrzeni fazowej otrzymane dla zestawu 4 wartości parametrów reakcji	192
4.7. Dynamika zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej dla zestawu 5 (przypadek z brakiem stabilności)	194
4.8. Dynamika przykładowych zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej dla zestawu 5 przy różnych stawkach podatkowych τ_1 , od $t = 400$. Wykres niebieski dla $\tau_1 = 0,09$, wykres czarny dla $\tau_1 = 0,07$	195
4.9. Dynamika PKB. Trajektorie PKB dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji. Kolory krzywych oznaczają: kolor niebieski – zestaw 1, czerwony – zestaw 2, czarny – zestaw 3, zielony – zestaw 4, żółty – zestaw 5	196
4.10. Dynamika długu sektora finansów publicznych w stosunku do PKB dla różnych wartości stawki podatkowej τ będącej sumą stawki podatkowej od dochodu z pra-	

cy τ_w i stawki ubezpieczenia zdrowotnego płaconego przez pracowników τ_2 . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: pomarańczowy dla $\tau = 26\%$, zielony dla $\tau = 20\%$, niebieski dla $\tau = 22,7\%$ (zestaw 1 – bazowy).....	200
4.11. Dynamika wybranych zmiennych modelu KMG dla różnych stawek podatkowych τ . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: pomarańczowe dla $\tau = 0,26$, zielone dla $\tau = 0,2$, niebieskie dla $\tau = 0,227$ (zestaw 1 – bazowy).....	201
4.12. Dynamika długu sektora finansów publicznych w stosunku do PKB dla różnych wartości stawki podatkowej τ_c . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: pomarańczowy dla $\tau_c = 0,4$, zielony $\tau_c = 0,1$, niebieski dla $\tau_c = 0,082$ (zestaw 1 – bazowy).....	202
4.13. Dynamika zmiennych modelu KMG dla różnych stawek podatkowych τ_c . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: pomarańczowe dla $\tau_c = 0,4$, zielone dla $\tau_c = 0,1$, niebieskie dla $\tau_c = 0,082$ (zestaw 1 – bazowy).....	203
4.14. Dynamika długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB dla różnych stawek podatku pośredniego τ_p . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: zielony dla $\tau_p = 0,17$, pomarańczowy dla $\tau_p = 0,13$, niebieski dla $\tau_p = 0,15$ (zestaw 1 – bazowy).....	204
4.15. Dynamika zmiennych modelu KMG dla różnych stawek podatku pośredniego τ_p . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla $\tau_p = 0,17$, pomarańczowe dla $\tau_p = 0,13$, niebieskie dla $\tau_p = 0,15$ (zestaw 1 – bazowy).....	205
4.16. Dynamika długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB dla różnych stawek τ_1 ubezpieczenia społecznego płaconego przez pracodawców. Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: zielony dla $\tau_1 = 0,04$ (spadek o 0,03), pomarańczowy dla $\tau_1 = 0,1$ (wzrost o 0,03), niebieski dla $\tau_1 = 0,07$ (zestaw 1 – bazowy).....	206
4.17. Dynamika zmiennych modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza dla różnych stawek τ_1 ubezpieczenia społecznego płaconego przez pracodawców. Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla $\tau_1 = 0,04$ (spadek o 0,03), pomarańczowe dla $\tau_1 = 0,1$ (wzrost o 0,03), niebieskie dla $\tau_1 = 0,07$ (zestaw 1 – bazowy).....	207
4.18. Dynamika długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB w zależności od poziomu wydatków rządu g . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: zielony dla $g = 0,08$ (spadek o 0,01), pomarańczowy dla $g = 0,1$ (wzrost o 0,01), niebieski dla $g = 0,09$ (zestaw 1 – bazowy).....	208
4.19. Dynamika zmiennych modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza w zależności od poziomu wydatków rządu g . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla $g = 0,08$ (spadek o 0,01), pomarańczowe dla $g = 0,1$ (wzrost o 0,01), niebieskie dla $g = 0,09$ (zestaw 1 – bazowy).....	209
4.20. Dynamika długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB dla różnych wartości stopy wzrostu μ . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: zielone dla $\mu = 0,04$ (spadek o 0,01), pomarańczowe dla $\mu = 0,08$ (wzrost o 0,03), niebieskie dla $\mu = 0,05$ (zestaw 1 – bazowy).....	210
4.21. Dynamika zmiennych modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza dla różnych stóp wzrostu μ . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla	

$\mu = 0,04$ (spadek o 0,01), pomarańczowe dla $\mu = 0,08$ (wzrost o 0,03), niebieskie dla $\mu = 0,05$ (zestaw 1 – bazowy)	211
4.22. Długookresowa dynamika zmiennych modelu KMGT (kolor pomarańczowy) na tle dynamiki modelu KMG (kolor niebieski)	221
4.23. Krótkookresowa dynamika zmiennych modelu KMGT (kolor pomarańczowy) na tle dynamiki modelu KMG (kolor niebieski)	221
4.24. Dynamika wybranych zmiennych modelu KMGT dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji. Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla zestawu 1 (słabsza reakcja banku centralnego), niebieskie dla zestawu 2 (reakcja silniejsza), pomarańczowe dla zestawu 3 (bazowego)	224
4.25. Dynamika wybranych zmiennych modelu KMGT dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji. Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla zestawu 1 (słabsza reakcja banku centralnego), niebieskie dla zestawu 2 (reakcja silniejsza), pomarańczowe dla zestawu 3 (zestaw bazowy)	225
4.26. Dynamika wybranych zmiennych modelu KMGT dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji: β_i , β_p oraz β_u . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: niebieskie dla $\beta_i = \beta_p = 0,04$, $\beta_u = 0,02$ (zestaw 1), zielone dla $\beta_i = \beta_p = 1$, $\beta_u = 0,05$ (zestaw 2), pomarańczowe dla $\beta_i = \beta_p = 0,02$, $\beta_u = 0,01$ (zestaw 3)	242
4.27. Dynamika PKB. Trajektorie PKB dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji β_i , β_p oraz β_u ; kolor niebieski dla $\beta_i = \beta_p = 0,04$, $\beta_u = 0,002$ (zestaw 1), zielony dla $\beta_i = \beta_p = 1$, $\beta_u = 0,05$ (zestaw 2), pomarańczowy dla $\beta_i = \beta_p = 0,2$, $\beta_u = 0,01$ (zestaw 3)	243

Damian Sołtysiak

The stability of the Keynes–Metzler–Goodwin monetary growth model

(Summary)

<https://doi.org/10.18559/978-83-8211-262-7-summary>

The stability of the Keynes–Metzler–Goodwin monetary growth model The neo-classical growth theory based on the paradigm of dynamic general equilibrium and intertemporal utility maximization has been increasingly questioned since the global financial crisis of 2008. This prompts interest in other monetary models of economic growth which are more closely related to Keynesian economics. Of particular importance in this regard are the works of three Keynesian economists, Carl Chiarella, Peter Flaschel and Willi Semmler, who have been developing Keynesian economics over the last two decades, resulting in the joint publication (sometimes with other co-authors) of a series of books on Keynesian economics with an emphasis on interrelations between real and financial spheres of the economy. Notable works include the comprehensive monograph *The dynamics of Keynesian monetary growth* (Chiarella & Flaschel, 2000) and the fundamental trilogy *Reconstructing Keynesian macroeconomics*, vol. 1-3 (Chiarella et al., 2012, 2013, 2014), in which these economists attempt to completely reinterpret and reconstruct Keynesian macroeconomics in its entirety¹. Other important works by these authors include Chiarella et al. (2000); Asada et al. (2003); Chiarella et al. (2005), and Charpe et al. (2011).

Chiarella, Flaschel and Semmler's most important monetary growth model, which they analyzed in various forms, is "the Keynes–Metzler–Goodwin model" (abbreviated to the KMG model), named to emphasize its relationship to the concepts developed earlier by these three economists. The equations of the KMG model expressed ideas taken from Keynes's *General theory* (1936) and Goodwin's (1967) work on the interaction of growth and income distribution; these are the K and G components of the model. The KMG models take into account goods mar-

¹ Another alternative and important trend in economics relating to Keynes is post-Keynesian economics (Lavoie, 2014).

ket disequilibrium, the implication of changes in inventories and the gradual adjustment of inventories to its desired level. The dynamics of inventories are related also to the concept of expected sales, which is formulated according to Metzler's (1941) lines and, as such, constitutes therefore the M-component of the KMG approach. To the same extent, the KMG model also relates to the Keynes-Wicksell-type models presented in Stein (1966), Rose (1966) and Fischer (1972), among other authors. In addition, its similarity to the Keynesian model presented in Sargent (1987, Ch. 5) should be noted.

All versions of the KMG model describe dynamics in the economy through a complex system of non-linear differential equations that reflect adaptive decision-making processes. The KMG model describes an economy consisting of the household sector, the government sector and firms. The level of consumption depends on the dynamics of employment and the dynamics of prices and wages described by two separate Phillips curves (for prices and wages). In turn, investments depend on factors such as the variation over time of the difference between the return on real capital and the real interest rate, as well as the degree of capacity utilization. Actual and expected inventories play a key role in this model. Companies adjust production levels based on their expected sales and changes in inventories, which in turn affects production capacity utilization rates and employment levels. The economy's production capacity depends both on the dynamics of physical capital and labor productivity growth.

The KMG model continues to be extended and modified; one example is Ogawa (2019a, 2019b, 2020), who extended the KMG model to a two-sector model; another is Flaschel (2020), in which an extensive KMG model is used to analyze how taxes, transfer payments and government spending improve the social protection of the employee household sector. Chiarella et al.'s (2021) latest research (authored by Peter Flaschel, Reiner Franke and the late Carl Chiarella) marks the culmination of the development of the Bielefeld school of macroeconomic thought.

Asada et al. (2018, 2019) recently presented an interesting variant of the KMG model that features private corporate debt to model the effects of fiscal and monetary policies. These authors also deal with the existence of limit cycles in the KMG model. Keynesian monetary growth models similar to the KMG model, in which limit cycles or periodic orbits may exist, also appear in recent works by Murakami (2016, 2018, 2020) and Araujo et al. (2020).

When analyzing KMG models, as in any economic growth theory, two research problems come to the fore. The first concerns whether the economy described by a given model can evolve sustainably along a balanced growth path. Since balanced growth refers to the growth in which proportions between variables (a structure of the economy) remain constant, whether such a balanced growth path exists comes down to the existence of such proportions between variables that facilitate such growth. In the terminology of economic growth theory, this concerns the existence

of a steady state. In monetary growth models, such as KMG models, an interesting issue is the steady state's dependence on or a lack of independence of monetary policy, in particular, concerning money supply growth (the problem of money neutrality). The second key research problem concerns whether an economy in its initial state and not on a balanced growth path (and thus not in a steady state) converges to this path over time, reaching proportions close to those characterizing a steady state. If such a convergence occurs, we speak of an asymptotic stability of the steady state. Stability is a desirable feature in mathematical models of economic growth because it indicates that in the course of time the growth of a modeled economy becomes increasingly harmonious. A lack of stability is a serious shortcoming of an economy described by such a model, as it implies the existence of a mechanism that deepens imbalances, which can lead to an economic crisis.

It should be emphasized that stability is not an unconditional feature of a model. Mathematical theorems concerning the stability of various growth models always rely on a number of assumptions essential to proving stability. In the case of KMG models, the assumptions that guarantee the stability of an economy, those concerning money supply growth or the rules of interest rate formation are of particular interest. Such assumptions make it possible to formulate conclusions as to whether and how monetary policy can affect the steady state and the stability or instability of an economy.

This dissertation constitutes an original contribution to the research on KMG models. It two proposes and analyzes new versions of the KMG model. While having many features in common, these models differ fundamentally in the way they describe the money market. The first model (referred to in the monograph as the KMG model) assumes exponential money supply growth. At the same time, the demand for money is an increasing function of the expected final demand in the product market and a decreasing function of the interest rate. Consequently, assuming money market equilibrium, the interest rate must adjust to changes in expected demand in such a way that the demand for money (equal to the money supply) also grows exponentially.

In the second model, a money demand function does not appear at all, and the dynamics of the interest rate are described by a Taylor equation (hence the second model is called the KMGT model). According to the Taylor equation, changes in the interest rate depend on three factors: a deviation in the current interest rate from its desired value, a deviation in the inflation rate from the desired inflation rate (inflation target), and a deviation in the capacity utilization ratio from its natural level. In the KMGT model, changes in the money supply are determined *ex post* that depends mainly on the demand of businesses for investment loans and the state's borrowing needs (bond issuance).

Both models are the result of several modifications the author introduced into standard KMG models. A point of reference for the first model presented in

the monograph is the KMG model developed by Asada et al. (2003), and for the second of the models, the KMG model by Charpe et al. (2011)

Another important difference between the models in question is that the KMG model features only a behavioral equation describing factors affecting the level of net investment, with no explicitly indicated sources of financing for these investments. In addition to the aforementioned behavioral equation (in an expanded form), the KMG model also features an equation showing directly that companies' investments are financed by their profits and investment credit.

In the monograph, four aims have been achieved. The first was to develop two new KMG-type models differing from the versions analyzed in the existing literature by virtue of several modifications. The second aim was to transform the formulated models into an intensive form and to determine and analyze their steady states, corresponding to balanced growth paths. The most important goal in the entire dissertation, and the most difficult to achieve, was to prove the stability of the two KMG models studied. The last of the aims was to conduct a series of computer simulations using data on the Polish economy. The simulations successfully provided answers to several questions that could not be obtained through qualitative model analysis.

The modifications introduced aim to improve the model by eliminating some crude and questionable elements from its equations. These elements seem to have been selected not for their economic relevance but primarily for their simplicity, which facilitates mathematical analysis of the model. The first two modifications concern equations describing determinants of the growth rate of fixed capital $\dot{K}/K$ and the growth rate of expected demand $\dot{Y}^e/Y^e$. In Chiarella et al.'s KMG models presented above, the equations contain parameter n , added simply to other components. Depending on the particular version of the model, n expresses either the constant growth rate of labor supply or the growth rate of labor productivity, or the sum of these two growth rates. Adding n to these equations is extremely convenient since, in the steady state, the remaining components of the equations become zero, which implies immediately that in this steady state both fixed capital and expected demand grow at rate n . In the present monograph, the dynamics of fixed capital and expected demand are much more thoroughly elaborated. In the equation describing $\dot{K}/K$, the constant parameter n has been replaced by a variable expressing the growth rate of expected demand $\dot{Y}^e/Y^e$. At the same time, parameter n has also been removed from the equation for $\dot{Y}^e/Y^e$ and substituted with the growth rate of the real wages as one of the two factors influencing $\dot{Y}^e/Y^e$, which is economically much more justifiable. The growth rate of real wages is an endogenous variable that depends on other model variables – principally, on the growth rate of the nominal wage and the inflation rate. The third modification is similar in character and concerns the equation showing three factors determining output level Y . In this case, one doubtful factor (component) nN^d (N^d – desired level of inventories) has been replaced with $\dot{Y}^e$, i.e. the change in expected demand.

Further important modifications concern the assumptions regarding taxes and real interest on bonds. In all versions of the KMG model presented by Chiarella et al., derivation of the intensive form of the model is facilitated by assuming that real taxes net of interest are assumed to be constant per unit of capital. As a consequence, the dependence of taxes on tax rates imposed on labor or capital incomes is not taken into account. Such dependence is considered only in the present model, which allows for a more comprehensive analysis of fiscal policy regarding taxes and the government budget deficit. In particular, in contrast to previous models, the ratio of government budget deficit to fixed capital ceases to be constant in time, despite the assumption of a constant ratio of government spending to capital.

The above modifications apply to both models presented in the monograph. Another modification applies only to the KMG model from the first chapter and concerns introducing a non-linear money demand function into this model. The authors of earlier versions of KMG models found in the literature consider a linear money demand function, whose values depend on expected demand and on the current interest rate deviating from a steady state interest rate, which is known in advance.² As a consequence, money demand in the steady state is determined exclusively by expected demand, independent of the value of the exogenously determined steady-state interest rate. This also raises doubts. Therefore, in the model proposed and presented in the monograph, the demand for money is described by a nonlinear function that depends on the expected demand and the actual, endogenously determined interest rate. As a result, the interest rate in the steady state becomes an endogenous value that depends on all parameters in the model.

The aforementioned modifications result in the appearance of new feedback and increased complexity in the two models analyzed. Nevertheless, it transpires that the models presented in the monograph can be transformed into an intensive form and the steady state can be uniquely determined, which is the second goal of the monograph. This opens the way for the monograph's third aim, namely, demonstrating the local asymptotic stability of the models in question.

Determining the steady state enables us to analyze the asymptotic stability of the KMG model. This consists in proving the convergence of variables of the intensive form model toward their steady-state values when time tends to infinity. Such steady-state stability is equivalent to the ability of the economy to converge toward a balanced growth path. Investigating such a convergence is the focus of interest of any mathematical theory of economic growth, be it Keynesian or neoclassical.

The intensive form model is a system of nonlinear differential equations, thus, to prove its local asymptotic stability, it must be shown that all of the eigenvalues of the Jacobian matrix of this system are either negative numbers or complex numbers with

² Chiarella et al. (2000, p. 279) admit that the above assumption was introduced in order to ease an analysis of a model.

negative real parts. Investigating these eigenvalues is a standard method for proving stability, which has been applied hundreds of times to different dynamic models. Since eigenvalues are also roots of the corresponding polynomial, their analyzing them is relatively simple when dealing with a system of two differential equations; however, it poses a significantly more difficult and sophisticated challenge with high-dimensional systems such as the KMG model. In the latter case, it is likely that the only way to show that the eigenvalues of a given Jacobian matrix guarantee stability is by subsequent zeroing of appropriate matrix parameters, which enables a multiple Laplace expansion of the determinant of the Jacobian matrix in order to obtain a sequence of matrices of a progressively descending order, whose eigenvalues can be more easily analyzed. First, the lowest-order matrix is shown to have appropriate eigenvalues. Subsequently, through a subsequent restoration of small positive values of previously zeroed parameters, it is demonstrated that the original Jacobian matrix also has eigenvalues which are either negative numbers or complex numbers with negative real parts.

The first rigorous proof of stability of the 7-dimensional KMG model, based on the idea outlined above, was presented 20 years ago in Chiarella et al. (2002). Other versions of the proof of stability (concerning modified KMG models) can be found in Asada et al. (2003) and Chiarella et al. (2006). In the latter publication, the authors use the term *cascade of stable matrices approach* to express the general idea underlying this proof.

While the same idea is also used for proof of stability of the KMG model presented in this monograph, this does not imply that it is merely a re-hash of earlier proofs. The modifications introduced into the model and the resultant new loops render its mathematical structure more complicated. This is particularly visible in the intensive form of the analyzed model, for which the Jacobian matrix is determined, and whose eigenvalues are examined. This is the first reason for which the proof presented differs from the earlier versions. The second reason is that the proof is obtained under different assumptions about model parameters, including tax rates, which are not present in the models analyzed by Chiarella et al. The third reason concerns certain differences in reasoning and denotation.

To prove stability, two fundamental difficulties had to be overcome. The first concerned the values of partial derivatives, evaluated at the steady state, of all functions defining the dynamics of the intensive form model; these derivatives constitute elements of the Jacobian matrix. The second difficulty concerned which parameters, and in which sequence, should be zeroed to show conclusively that all eigenvalues of the Jacobian matrix are either negative or complex numbers with negative real parts. However, there was no ready answer to or even a suggestion about how to resolve this crucial question. Hence, a laborious heuristic process was necessary, involving a series of attempts that ultimately proved successful.

Proving the existence of a steady state and demonstrating that under certain assumptions this state is locally asymptotically stable does not give an answer to many

economically important questions about the development of an economy described by the KMG and KMGT models discussed above. One such question concerns how long it takes for the economy, starting from an initial state, to assume a path of balanced growth. Another equally important question is how far away from a steady state the economy's initial state can be for it to converge. These and many other questions can only be answered by means of computer simulations. Conducting such simulations was the fourth and final aim of the monograph.

Simulations were conducted for data on the Polish economy using both models analyzed in the dissertation. Before starting the simulations, the models were modified to maximize the information about the Polish economy that could be included, while preserving the mathematical structure. Then, based on the same data, the models' parameters were calibrated, and steady states of the models were determined.

The results of the numerous computer simulations confirmed the validity of the theorems proved in the monograph regarding the local asymptotic stability of the steady state of the KMG and KMGT models. The simulation results were shown to be similar to those obtained by other authors and confirmed that the economy's arrival at the steady state is slow, oscillatory, and requires a very long time horizon. In the simulation results, the steady state appears as a one that, although unattainable in a realistic time horizon, acts as a "compass" for the economy in determining the direction of structural changes caused by market processes. The practical importance of the stability of KMG models is thus demonstrated.

In addition to empirical stability analysis using computer simulations, the short-term impact of fiscal and monetary policies on the economy was also analyzed. The simulation results from the KMG model and the KMGT model were compared. In addition, simulations were run on the efficacy of monetary policy shielding measures against economic disruptions related to the SARS-CoV-2 virus pandemic. The analysis focused on how an expansionary monetary policy can mitigate the effects of these perturbations and evaluated the long-term effects of this.

The monograph is divided into four chapters. In the first chapter, the author's version of the KMG model with exponential money supply growth is presented. This model is then transformed into its intensive form, the steady state is determined, and the sensitivity of the steady state to changes in model parameters are examined.

Chapter Two introduces another version of the KMG model, incorporating the Taylor rule and investment credit, after which this model is compared with the model presented in Chapter One.

In the third chapter, mathematical proof of the stability of the two models described in the previous chapters is presented. This proof constitutes the main theoretical results demonstrated in the author's dissertation. The proven stability theorems provide sufficient conditions for the convergence of the modeled economies to the balanced growth path.

The fourth chapter is devoted to computer simulations based on data from the Polish economy and using the models studied. The results of these simulations confirm the validity of the stability theorems proven in Chapter Three.

Proofreading Rob Pagett

Keywords: Keynesian macroeconomics, disequilibrium macroeconomics, monetary growth models, nonlinear economic dynamics, stability

References

- Araujo, R., Flaschel, P., & Moreira, H. (2020). Limit cycles in a model of supply-side liquidity/profit-rate in the presence of a Phillips curve, *Economia*, 21(2), 145-159. <https://doi.org/10.1016/j.econ.2019.09.003>
- Asada, T., Chiarella, C., Flaschel, P., & Franke, F. (2003). *Open economy macrodynamics*. Springer.
- Asada, T., Demetrian, M., & Zimka, R. (2018). On dynamics in a Keynesian model of monetary and fiscal policy with debt effect. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 58, 131-146. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.06.013>
- Asada, T., Demetrian, M., & Zimka, R. (2019). On dynamics in a Keynesian model of monetary and fiscal stabilization policy mix with twin debt accumulation. *Metroeconomica*, 70(3), 365-383. <https://doi.org/10.1111/meca.12220>
- Charpe, M., Chiarella, C., Flaschel, P., & Semmler, W. (2011). *Financial assets, debt and liquidity crises: A Keynesian approach*. Cambridge University Press.
- Chiarella, C., & Flaschel, P. (2000). *The dynamics of Keynesian monetary growth*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511492396>
- Chiarella, C., Flaschel, P., & Semmler, W. (2012). *Reconstructing Keynesian macroeconomics*, vol. 1: *Partial perspectives*. Routledge.
- Chiarella, C., Flaschel, P., & Semmler, W. (2013). *Reconstructing Keynesian macroeconomics*, vol. 2: *Integrated Approaches*. Routledge.
- Chiarella, C., Flaschel, P., & Semmler, W. (2014). *Reconstructing Keynesian macroeconomics*, vol. 3: *Macroeconomic activity, banking and financial markets*. Routledge.
- Chiarella, C., Flaschel, P., Groh, G., & Semmler, W. (2000). *Disequilibrium, growth and labor market dynamics*. Springer.
- Chiarella, C., Flaschel, P., Franke, R., & Semmler, W. (2002). *Stability analysis of a high-dimensional macrodynamic model of real-financial interaction: A cascade of matrices approach*. Working Paper Series 123. Finance Discipline Group, UTS Business School, University of Technology, Sydney.
- Chiarella, C., Flaschel, P., & Franke, R. (2005). *Foundations for a disequilibrium theory of the business cycle. Qualitative analysis and quantitative assessment*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511492402>
- Chiarella, C., Flaschel, P., Franke, R., & Semmler, W. (2006). A high-dimensional model of real-financial market interaction: The cascade of stable matrices approach. In C. Chiarella, R. Franke, P. Flaschel, & W. Semmler (Eds.), *Quantitative and empirical analysis*

- of nonlinear dynamic macromodels, contributions to economic analysis (pp. 359-384), Elsevier. [https://doi.org/10.1016/S0573-8555\(05\)77011-5](https://doi.org/10.1016/S0573-8555(05)77011-5)
- Chiarella, C., Flaschel, P., Franke, R., Araujo, R., Charpe, M., Proaño, Ch., & Szczutkowski, A. (2021). *Unbalanced growth from a balanced perspective*, Edward Elgar.
- Fischer, S. (1972). Keynes–Wicksell and neoclassical models of money and growth. *American Economic Review*, 62, 880-890.
- Flaschel, P. (2020). A baseline model of 'Social Protection' in open economies of the KMG variety. Bielefeld. <https://doi.org/10.4119/unibi/2942156>
- Goodwin, R. M. (1967). A growth cycle. In C. H. Feinstein (Ed.), *Socialism, capitalism and economic growth* (pp. 54-58). Cambridge University Press.
- Keynes, J. M. (1936). *The general theory of employment, interest and money*. Macmillan.
- Lavoie, M. (2014). *Post-Keynesian economics: New foundations*, Edward Elgar.
- Metzler, L. A. (1941). The nature and stability of inventory cycles. *Review of Economic Statistics*, 23(3), 113-129. <https://doi.org/10.2307/1927555>
- Murakami, H. (2016). Alternative monetary policies and economic stability in a medium-term Keynesian model. *Evolutionary and Institutional Economics Review*, 13(2), 323-362. <https://doi.org/10.1007/s40844-016-0045-2>
- Murakami, H. (2018). Existence and uniqueness of growth cycles in post Keynesian systems. *Economic Modelling*, 75, 293-304. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2018.07.001>
- Murakami, H. (2020). Monetary policy in the unique growth cycle of post Keynesian systems. *Structural Change and Economic Dynamics*, 52(C), 39-49. <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2019.10.002>
- Ogawa, S. (2019a). Dynamic analysis of a disequilibrium macroeconomic model with dual labor markets. *Metroeconomica*, 70(3), 525-550. <https://doi.org/10.1111/meca.12255>
- Ogawa, S. (2019b). *Effective demand and quantity constrained growth: A simple two sector disequilibrium approach*. MPRA Paper, 93336. <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/93336/>
- Ogawa, S. (2020). *Monetary growth with disequilibrium: A non-Walrasian baseline model*. MPRA Paper, 101236. University Library of Munich, Germany.
- Rose, H. (1966). Unemployment in a theory of growth. *International Economic Review*, 7(3), 260-282. <https://doi.org/10.2307/2525525>
- Sargent, T. (1987). *Macroeconomic theory* (2nd ed.). Academic Press.
- Stein, J. (1966). Money and capacity growth. *Journal of Political Economy*, 74(5), 451-465. <https://doi.org/10.1086/259199>

See more in the monograph in Polish: Sołtysiak, D. (2025). *Stabilność gospodarki w monetarnym modelu wzrostu typu Keynesa–Metzlera–Goodwina*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu. <https://doi.org/10.18559/978-83-8211-262-7>