



Krystian Szczęsny

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie  
d2032@student.uek.krakow.pl

## WYKORZYSTANIE KASKAD KOPULI W AGREGACJI RYZYKA W PROCESIE WYZNACZANIA KAPITAŁOWYCH WYMOGÓW WYPŁACALNOŚCI W SOLVENCY II

<https://doi.org/978-83-8211-131-6/7>

### The use of vine copula constructions in the process of determining solvency capital requirements in Solvency II

Abstract

One of the basic aspects of the Solvency II Directive introduced in 2016 is the protection of the insured against the insolvency of insurance companies. For this purpose, by aggregating the solvency capital requirements for the specific types of risk to which the insurer is exposed, the solvency capital requirement (SCR) and the diversification effect (ED) are determined. Insurers are able to calculate the SCR using the Standard Formula given by the authors of the Directive or internal models developed by their insurance companies. The Standard Formula is based on the variance-covariance method, which assumes a constant correlation matrix that defines the relationships between aggregated risks to which the insurer is exposed. The aim of the research is to use, in internal models, pair-copula constructions in order to model the relationship between aggregated risk modules. The structure of the relationship between the aggregated risks is modeled with the use of C-vine and D-vine copula, while the range of possible SCRs resulting from various dependency modeling methods is determined using the ARA (Adaptive Rearrangement Algorithm). In the study, the author arbitrarily assumes loss distributions for the insurer's five major risk modules, i.e. market, counterparty default, life, health, and non-life modules. The author compares the ED obtained by the variance-covariance method, the ED obtained with the use of copula and the ED corresponding to the upper limit of the SCR determined by the ARA algorithm. The conducted research shows how important in the SCR and ED determination process is the role played by the correct identification of the structure of the relationship between aggregated risks and presents the possibilities of using pair-copula constructions for this purpose.

**Keywords:** Solvency II, Solvency Capital Requirement, diversification effect, vine copula, dependency structure.

#### Sugerowane cytowanie:

Szczęsny, K. (2022). Wykorzystanie kaskad kopuli w agregacji ryzyka w procesie wyznaczania kapitałowych wymogów wypłacalności w Solvency II. W: M. Lemkowska, M. Wojtkowiak (red.), *Sektor ubezpieczeń w obliczu wyzwań współczesności* (s. 98–117). Poznań: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu. <https://doi.org/10.18559/978-83-8211-131-6/7>



Ta książka jest udostępniana na licencji Creative Commons – Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0 Międzynarodowe

## Wprowadzenie

W styczniu 2016 r. weszła w życie dyrektywa Solwency II (dalej: dyrektywa), mająca na celu zwiększenie bezpieczeństwa ubezpieczonych przed niewypłacalnością zakładów ubezpieczeń. W tym celu na drodze agregacji kapitałowych wymogów wypłacalności dla poszczególnych rodzajów ryzyka wyznacza się kapitałowy wymóg wypłacalności (*solvency capital requirement*, SCR) i efekt dywersyfikacji (ED). Niniejszy rozdział dotyczy drugiego poziomu agregacji ryzyka, na którym wyznaczany jest podstawowy kapitałowy wymóg wypłacalności (*basic solvency capital requirement*, BSCR), obliczany zgodnie z formułą standardową (dalej też: FS) za pomocą metody wariancji-kowariancji, w której wartości korelacji są takie same dla wszystkich ubezpieczycieli i zostały podane w Dyrektywie Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej<sup>1</sup>. FS poddano ocenie w piątym badaniu ilościowym (EIOPA, 2011). Ubezpieczyciele biorący udział w badaniu zgłaszali, że zależności między modułami ryzyka w ich zakładach ubezpieczeń są inne niż podane przez twórców dyrektywy w macierzy korelacji. Autorzy dyrektywy zdają sobie sprawę z niedoskonałości FS i zalecają stosowanie modeli wewnętrznych, które w lepszym stopniu odzwierciedlają profil ryzyka ubezpieczyciela. Wątpliwości odnośnie do FS ma także Europejski Urząd Nadzoru Ubezpieczeń i Pracowniczych Programów Emerytalnych (European Insurance and Occupational Pensions Authority, EIOPA), który w październiku 2020 r. rozpoczął ogólnoeuropejskie badanie porównawcze dotyczące dywersyfikacji w modelach wewnętrznych. Jednym z celów badania jest lepsze zrozumienie związku między sposobami modelowania zależności i agregacją ryzyka a wynikającymi z nich korzyściami z dywersyfikacji. Tematyka tego artykułu wpisuje się w badania zainicjowane przez EIOPA.

Zależności między modułami ryzyka modelowano w literaturze, wykorzystując algorytmy uczenia maszynowego i kopule, czyli funkcje łączące. Modelowanie zależności między modułami ryzyka z wykorzystaniem kopuli odnajdujemy m.in. w artykułach Lluísa Bermúdeza, Antoniego Ferriego i Montserrat Guillén (2013) oraz Stanisława Wanata i Ryszarda Koniecznego (2017). Istotne w teorii kopuli jest twierdzenie Sklara (1959), w myśl którego nieznaną, wielowymiarowy rozkład łączny może zostać przedstawiony za pomocą kopuli

---

<sup>1</sup> Wartości współczynników w korelacji między poszczególnymi modułami ryzyka są szczegółowo przedstawione w Rozporządzeniu delegowanym Komisji (UE) 2015/35 z dnia 10 października 2014 r. uzupełniającym dyrektywę Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II).

i rozkładów brzegowych. O ile stosunkowo dość łatwo opisać strukturę zależności między dwoma modułami ryzyka, o tyle trudność pojawia się, gdy należy wybrać kopulę dla wymiaru większego niż dwa. Wówczas wspomniane kopule dwuwymiarowe wykazują szereg ograniczeń związanych z ich strukturą i parametrami. Wprowadzone przez Tima Bedforda i Rogera M. Cooke'a (2002) kaskady kopuli to elastyczna klasa modeli wielowymiarowych, dzięki którym wielowymiarowy rozkład można przedstawić za pomocą kopuli dwuwymiarowych. Pozwala to na elastyczność w modelowaniu zależności między większą liczbą zmiennych losowych, przy uwzględnieniu asymetrii rozkładów i zależności w ogonach. Wykorzystanie kaskad kopuli odnajdujemy w modelowaniu kursów walut (Liu, Wang i Sriboonchitta, 2019) czy wyznaczaniu zwrotów kapitałowych (Berg i Aas, 2009). Celem artykułu jest wykorzystanie kaskad C-vine oraz D-vine do modelowania zależności w procesie wyznaczania BSCR. Według najlepszej wiedzy autora w tym kontekście kaskady kopuli nie zostały do tej pory zaproponowane.

W pierwszej części omówiono pojęcie efektu dywersyfikacji w procesie agregacji ryzyka. Drugi punkt przedstawia stosowaną w Solwency II standardową metodę szacowania BSCR. W trzeciej części przybliżono tło zastosowanej w pracy metodologii, czyli twierdzenie Sklara i szacowanie ograniczeń wartości zagrożonej (*value at risk*, VaR) dla sumy zmiennych losowych za pomocą algorytmu ARA (*adaptive rearrangement algorithm*). W czwartym punkcie zaprezentowano kaskady C-vine i D-vine – ich postać graficzną i analityczną. Piąta część zawiera badania empiryczne dla arbitralnie założonych zmiennych losowych opisujących moduły ryzyka.

## 1. Efekt dywersyfikacji

W standardowym podejściu Solwency II całkowity kapitałowy wymóg wypłacalności dla ubezpieczyciela jest obliczany według następującego wzoru:

$$SCR = BSCR + SCR_{Op} + Korekta, \quad (1)$$

gdzie:

- $SCR$  – całkowity kapitałowy wymóg wypłacalności,
- $BSCR$  – podstawowy kapitałowy wymóg wypłacalności,
- $SCR_{Op}$  – wymóg kapitałowy dla ryzyka operacyjnego,
- $Korekta$  – korekta z tytułu zdolności rezerw i podatków odroczonech do pokrywania strat.

BSCR jest wyznaczany na drodze agregacji czynników ryzyka, z których nie wszystkie występują równocześnie. Stąd też określany w wyniku takiej agregacji kapitał jest na ogół nie większy od kapitału potrzebnego do zabezpieczenia się przed każdym czynnikiem ryzyka z osobna. Uzyskana różnica jest nazywana efektem dywersyfikacji i jest wyrażana za pomocą zdefiniowanego niżej współczynnika dywersyfikacji.

Niech zmienne losowe  $L_i (i=1, \dots, k)$  opisują czynniki ryzyka ubezpieczyciela, a  $L = \psi(L_1, \dots, L_k)$  jest zmienną losową opisującą łączne ryzyko ubezpieczyciela, gdzie  $\psi$  jest funkcją agregującą. Wówczas współczynnik dywersyfikacji wyraża się wzorem:

$$d = 1 - \frac{\kappa(L)}{\sum_{i=1}^k \kappa(L_i)} \quad (2)$$

gdzie:

$\kappa(L_i) = VaR_{0,995}(L_i) - E(L_i)$  – wymóg kapitałowy z tytułu ryzyka  $L_i$ ,

$\kappa(L) = VaR_{0,995}(L) - E(L)$  – wymóg kapitałowy z tytułu łącznego ryzyka  $L$ .

W wyznaczaniu efektu dywersyfikacji kluczową kwestią jest wyznaczenie zagregowanej zmiennej ryzyka  $L$ , której rozkład jest zdeterminowany sposobem modelowania zależności między agregowanymi modułami ryzyka.

W niniejszym rozdziale BSCR jest wyznaczony w następujący sposób:

- za pomocą formuły standardowej,
- przy założeniu pełnej zależności liniowej i braku zależności liniowej,
- przy założeniu braku wiedzy o strukturze zależności między modułami ryzyka,
- przy założeniu, że struktura zależności między modułami ryzyka jest opisana za pomocą kaskad kopuli C-vine i D-vine.

## 2. Formuła standardowa

Zgodnie z formułą standardową BSCR wyznacza się na drodze agregacji wymogów kapitałowych dla pięciu modułów ryzyka w dwóch krokach:

1. Wyznacza się wymogi kapitałowe  $\kappa(L_i)$  dla modułów ryzyka poprzez agregację wymogów kapitałowych dla podmodułów ryzyka; te z kolei wyznacza się poprzez agregację poszczególnych nośników ryzyka. Szerzej ten problem przedstawił Wanat (2014, s. 118–120).

2. Wyznacza się wymóg kapitałowy  $\kappa(L)$  z tytułu łącznego ryzyka zgodnie ze wzorem:

$$BSCR = \sqrt{WRW^T} \quad (3)$$

gdzie:

$$W = [\kappa(L_1), \kappa(L_2), \kappa(L_3), \kappa(L_4), \kappa(L_5)], \quad (4)$$

natomiast  $R$  jest macierzą współczynników korelacji liniowej między modułami ryzyka (tabela 1). Wartości korelacji liniowej w macierzy  $R$  zostały podane w dyrektywie, a ubezpieczyciele, stosując FS, muszą z niej korzystać.

**Tabela 1. Wartości współczynników korelacji między modułami ryzyka ubezpieczyciela**

	<i>Market</i>	<i>Couterp</i>	<i>Life</i>	<i>Health</i>	<i>Non.Life</i>
<i>Market</i>	1	0,25	0,25	0,25	0,25
<i>Couterp</i>	0,25	1	0,25	0,25	0,5
<i>Life</i>	0,25	0,25	1	0,25	0
<i>Health</i>	0,25	0,25	0,25	1	0
<i>Non.Life</i>	0,25	0,5	0	0	1

Źródło: opracowanie własne na podstawie (EIOPA, 2011).

Ubezpieczyciele mogą wyznaczyć BSCR z wykorzystaniem FS lub modeli wewnętrznych. Wybierając tę pierwszą możliwość, nie mają możliwości identyfikacji właściwej struktury zależności między modułami ryzyka. Zgodnie z dyrektywą muszą stosować macierz  $R$ , w której zostały ustalone zależności między poszczególnymi modułami ryzyka. Natomiast jeśli ubezpieczyciele chcą zidentyfikować rzeczywistą strukturę zależności między modułami ryzyka, mogą zbudować model wewnętrzny, który umożliwi zakładom ubezpieczeń lepsze dopasowanie BSCR do profilu prowadzonej przez nich działalności niż FS. Model wewnętrzny musi zostać uprzednio zatwierdzony przez organ nadzoru. W związku z tym większość zakładów ubezpieczeń stosuje FS.

Korelacja liniowa opisuje jedynie zależności o charakterze liniowym i nie oznacza związku przyczynowego, zatem taka sama wartość korelacji może odpowiadać różnym strukturom zależności. Wartości w macierzy korelacji (tabela 1) zostały ustalone dla wszystkich ubezpieczycieli, bez względu na profil ich działalności. W rozdziale zaprezentowano wyniki badań, w których do wyznaczenia struktury zależności między modułami ryzyka są wykorzystane kaskady kopuli.

### 3. Kopula jako narzędzie modelowania zależności

Efekt dywersyfikacji ryzyka ubezpieczyciela jest ściśle związany ze strukturą zależności między agregowanymi modułami ryzyka. Stosując FS, ubezpieczyciel musi założyć, że zależności między modułami ryzyka są takie jak te dane przez twórców dyrektywy. Do identyfikacji rzeczywistej struktury zależności ubezpieczyciele potrzebują odpowiednich narzędzi. Zastosowanie korelacji liniowej jest jednak bardzo ograniczone, ponieważ nie może być ona używana, gdy obserwuje się rozkłady inne niż normalne. Elastycznym narzędziem, za pomocą którego można wyznaczyć rzeczywistą strukturę zależności między agregowanymi modułami ryzyka, jest kopula. Kopule mogą być stosowane do opisu zależności między rozkładami asymetrycznymi i do modelowania zależności w ogonach.

Kopula  $C(u_1, \dots, u_k)$  to dystrybuanta  $k$ -wymiarowego rozkładu z jednostajnymi rozkładami brzegowymi. Jest to narzędzie, za pomocą którego można połączyć dowolne jednowymiarowe rozkłady brzegowe w rozkład wielowymiarowy. Wynika to z fundamentalnego w teorii kopuli następującego twierdzenia Sklara.

Niech  $F_{1, \dots, k}$  będzie  $k$ -wymiarową dystrybuantą łączną odpowiednio z rozkładami brzegowymi  $F_1, \dots, F_k$ . Wtedy istnieje kopula  $C: I^k \rightarrow I$ , taka że dla każdego  $x_1, \dots, x_k \in R$ ,

$$F_{1, \dots, k}(x_1, \dots, x_k) = C(F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)). \quad (5)$$

Odwrotnie, jeżeli  $C$  jest kopulą i  $F_1, \dots, F_k$  są dystrybuantami, to funkcja  $F_{1, \dots, k}$  określona wzorem (5) jest dystrybuantą łączną o dystrybuantach brzegowych  $F_1, \dots, F_k$ .

Jeśli  $F_1, \dots, F_k$  są ciągłe, to kopula  $C$  wyznaczona jest jednoznacznie.

Jeśli  $F_1, \dots, F_k$  są rosnące i injektywne, to dla każdej dystrybuanty  $F_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) istnieje funkcja odwrotna. Mając to założenie, możemy sformułować następujący kluczowy wniosek wynikający z powyższego twierdzenia.

Niech  $F_{1, \dots, k}$  oraz  $F_1, \dots, F_k$  będą określone jak w twierdzeniu Sklara i niech  $F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, \dots, F_k^{(-1)}$  będą funkcjami odwrotnymi do dystrybuant  $F_1, \dots, F_k$ . Wtedy dla  $u_1, \dots, u_k \in [0, 1]^k$  mamy:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_k) = F_{1, \dots, k}(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), \dots, F_k^{(-1)}(u_k)) \quad (6)$$

Zatem jeśli znamy rozkłady brzegowe  $L_i$ , to wszystkie informacje na temat zależności między zmiennymi losowymi  $L_i$  są zawarte w kopuli.

Oznaczmy przez  $\Xi_k$  klasę  $k$ -wymiarowych kopuli. Korzystając z twierdzenia Sklára, ustalone rozkłady brzegowe  $L_1, \dots, L_k$  łączymy  $k$ -wymiarową kopulą  $C \in \Xi_k$  i te same rozkłady brzegowe połączone kopulą  $C$  oznaczamy jako  $L_1^C, \dots, L_k^C$ . Natomiast zidentyfikowana rzeczywista struktura zależności między ustalonymi rozkładami  $L_1, \dots, L_k$  jest opisana przez kopulę  $C_0 \in \Xi_k$ . Jeżeli ubezpieczyciel zna rozkłady  $L_i$  odpowiadające poszczególnym modułom ryzyka, a nie zna zależności występujących między zmiennymi losowymi  $L_i$ , to nie może wyznaczyć dokładnej wartości  $VaR_\alpha(L)$ , ale dzięki badaniom Paula Embrechtsa, Bina Wanga i Ruodu Wanga (2015) może dla ustalonych rozkładów brzegowych  $L_i$  wyznaczyć przedział możliwych  $VaR_\alpha(L)$ :

$$\underline{VaR}_\alpha(L) \leq VaR_\alpha(L_1^{C_0} + \dots + L_k^{C_0}) \leq \overline{VaR}_\alpha(L) \quad (7)$$

gdzie:

$$\underline{VaR}_\alpha(L) = \inf_{C \in \Xi_k} \left\{ VaR_\alpha(L_1^C + \dots + L_k^C) \right\} \quad (8)$$

$$\overline{VaR}_\alpha(L) = \sup_{C \in \Xi_k} \left\{ VaR_\alpha(L_1^C + \dots + L_k^C) \right\} \quad (9)$$

Tematyka poszukiwania ograniczenia  $VaR_\alpha(L)$  jest bardzo ważna w procesie zarządzania ryzykiem ubezpieczyciela. W ostatnich latach problem ten poruszali Paul Embrechts, Giovanni Puccetti i Ludger Rüschendorf (2013) oraz Carole Bernard i Steven Vanduffel (2015). W wyniku tych badań powstał algorytm RA (*rearrangement algorithm*), który zbudowali Embrechts, Puccetti i Rüschendorf (2013). Pozwala on wyznaczyć granicę  $VaR_\alpha(L)$  dla znanych różnych rozkładów brzegowych  $L_i$ . Ze względu na złożoność algorytmu RA w kolejnych latach powstały różne jego modyfikacje. Jedną z nich jest algorytm ARA (*adaptive rearrangement algorithm*) zaproponowany przez Mariusa Hoferta, Amira Memaroluie, Davida Saundersa i Tony'ego Wirjanto (2015).

W literaturze wyróżnia się trzy rodziny kopuli: kopule z rodziny eliptycznych, z rodziny Archimedesesa oraz kopule z rodziny wartości ekstremalnych. W modelowaniu ryzyka w zakładach ubezpieczeń wykorzystuje się kopule z rodzin eliptycznych i Archimedesesa. Kopule eliptyczne są elastyczne w modelowaniu zależności dla większej liczby zmiennych losowych, ponieważ uwzględniają zależność między każdą parą zmiennych losowych. Natomiast są to kopule symetryczne, dlatego nie można za ich pomocą modelować dowolnej struktury

zależności. Zaprezentowane w literaturze kopule z rodziny Archimedesesa dobrze sprawdzają się w modelowaniu zależności asymetrycznych dla dwóch zmiennych losowych, podczas gdy parametr zależności określa siłę zależności między nimi. Natomiast jeśli modelujemy zależności między większą liczbą zmiennych losowych, to ustalony parametr zależności określa tę samą siłę zależności między wszystkimi zmiennymi losowymi, co sprawia, że model kopuli staje się sztywny i traci wiele informacji na temat zależności. W związku z opisanymi ograniczeniami kopuli z rodzin eliptycznych i Archimedesesa do modelowania zależności między modułami ryzyka ubezpieczyciela należy wykorzystać bardziej elastyczne narzędzie. Zastosowanie kaskad kopuli pozwala na uniknięcie opisanych ograniczeń.

#### 4. Kaskady kopuli

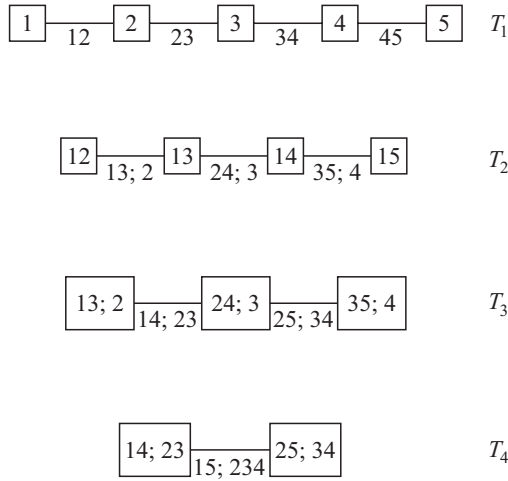
Przy modelowaniu zależności wielowymiarowych przydatnym narzędziem są kaskady kopuli. W odróżnieniu od wielowymiarowych kopuli Archimedesesa, gdzie parametr zależności dla każdej pary zmiennych losowych jest taki sam, kaskady kopuli uwzględniają zależności między każdą parą zmiennych losowych. Z praktycznego punktu widzenia interesuje nas wyznaczenie gęstości wielowymiarowej. Zakładając, że  $F_i$  są ciągłe i ściśle rosnące, funkcję gęstości prawdopodobieństwa dla (5) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \frac{\partial F_{1\dots k}(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_1 \dots \partial x_k} = \frac{\partial C(u_1, u_2, \dots, u_k)}{\partial u_1 \dots \partial u_k} \prod_{i=1}^k \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} = \\ &= c(u_1, u_2, \dots, u_k) \prod_{i=1}^k f_i(x_i) \end{aligned} \quad (10)$$

Problemem, jaki pojawia się przy wyznaczaniu gęstości wielowymiarowej  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , jest znalezienie gęstości kopuli wielowymiarowej  $c(u_1, u_2, \dots, u_k)$ . W tym celu, opierając się na badaniach Claudii Czado (2019), można wykorzystać kaskady kopuli, dzięki którym wielowymiarową gęstość  $c(u_1, u_2, \dots, u_k)$  można przedstawić za pomocą kopuli dwuwymiarowych. Poniżej zaprezentowano dwa modele kaskad kopuli: D-vine i C-vine. Każdą z tych reprezentacji wyrażamy w postaci graficznej (rys. 1 i 2). Pięciowymiarową dekompozycję D-vine przedstawia rysunek 1.

W wierzchołkach drzewa  $T_1$  umieszcza się indeksy zmiennych losowych, które łączy się krawędziami, a następnie wyznacza się ich etykiety. Krawędź





**Rysunek 1. Pięciowymiarowa dekompozycja D-vine**

Źródło: opracowanie własne.

łącącą wierzchołek 1 z wierzchołkiem 2 etykietuje się jako 12, wierzchołek 2 z wierzchołkiem 3 jako 23 itd. Do wierzchołków drzewa  $T_2$  trafiają etykiety z drzewa  $T_1$ , następnie wierzchołki łączą się krawędziami i nadaje się im etykiety. Krawędź łączącą wierzchołek 12 z wierzchołkiem 23 etykietuje się jako 13; 2, gdzie po średniku umieszcza się indeks zmiennej, występującej zarówno w wierzchołku 12 jak i w wierzchołku 23, a przed średnikiem umieszcza się indeksy pozostałych zmiennych w kolejności rosnącej. Zmienne przed średnikiem to zmienne warunkowane, a po średniku – zmienne warunkujące. Kolejne krawędzie drzewa  $T_2$  wyznacza się analogicznie. W drzewie  $T_3$  w wierzchołkach umieszcza się etykiety z drzewa  $T_2$ . Wierzchołki drzewa łączą się krawędziami, które etykietuje się, powtarzając rozumowanie z drzewa  $T_2$ . Dla przykładu etykietą dla krawędzi łączącej wierzchołek 13; 2 z wierzchołkiem 24; 3 jest 14; 23. Po średniku umieszcza się zmienne występujące zarówno w wierzchołku 13; 2, jak i w wierzchołku 24; 3 w kolejności rosnącej, a przed średnikiem – pozostałe zmienne w kolejności rosnącej. W ostatnim drzewie ( $T_4$ ) do wierzchołków grafu trafiają etykiety z drzewa  $T_3$ . Etykietę dla krawędzi w tym drzewie wybiera się analogicznie jak etykiety w drzewach wcześniejszych.

Wyznaczając zatem dekompozycję D-vine dla  $k$  zmiennych losowych, otrzymujemy  $k - 1$  drzew. Pierwsze drzewo składa się z  $k$  wierzchołków i  $k - 1$  krawędzi. Zauważmy, że wybór porządku w drzewie  $T_1$  nie jest jednoznaczny i determinuje porządek w kolejnych drzewach. Dla  $k$  wierzchołków w drzewie  $T_1$ ,

przy nieskierowanych krawędziach w tym drzewie, istnieje  $\frac{k!}{2}$  możliwości wyboru dekompozycji D-vine.

W części empirycznej pracy do wyboru porządku w drzewie  $T_1$  wykorzystujemy algorytm znalezienia najkrótszej ścieżki hamiltonowskiej między wierzchołkami drzewa (Berman, 2010, s. 54–57). Wagi dla każdej krawędzi wybieramy jako  $1 - |\tau_{i,j}|$ , gdzie  $|\tau_{i,j}|$  oznacza wartość bezwzględną współczynnika  $\tau$  Kendalla między  $i$ -tą i  $j$ -tą zmienną losową ( $i, j \in \{1, \dots, k\}$ ).

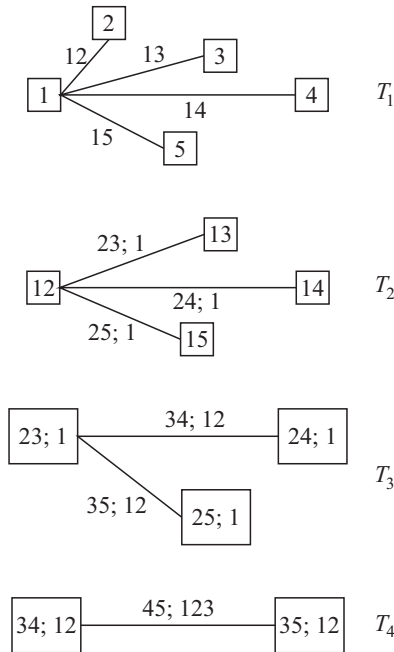
Mając ustalony porządek w drzewie  $T_1$ , przystępujemy do wyboru kopuli i jej parametrów dla każdej krawędzi drzewa  $T_1$ . Jeśli drzewo  $T_1$  składa się z  $k$  wierzchołków, to zostaje dopasowanych  $k - 1$  kopuli. Każda kopuła jest indeksowana etykietą krawędzi, dla której została dobrana. Następnie z wybranych kopuli losuje się obserwacje. Otrzymuje się  $k - 1$  macierzy obserwacji o wymiarach  $n \times 2$  ( $n$  oznacza liczebność próby), które trafiają do wierzchołków drzewa  $T_2$ . Dalej dla każdej krawędzi drzewa  $T_2$  jest dobierana rodzina kopuli warunkowych i ich parametry. Wybranych kopuli jest  $k - 2$ , a każda kopuła jest indeksowana etykietą krawędzi, do której została dobrana. Procedurę tę powtarza się aż do momentu wyznaczenia dwuwymiarowej kopuli warunkowej dla dwóch ostatnich wierzchołków drzewa. Gęstość D-vine dla pięciu zmiennych losowych definiuje się jako:

$$\begin{aligned} f = & f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 \times c_{12}(F_1, F_2) c_{23}(F_2, F_3) c_{34}(F_3, F_4) c_{45}(F_4, F_5) \times \\ & \times c_{13;2}(F_1; 2, F_3; 2) c_{24;3}(F_2; 3, F_4; 3) c_{35;4}(F_3; 4, F_5; 4) \times \\ & \times c_{14;23}(F_1; 23, F_4; 23) c_{25;34}(F_2; 34, F_5; 34) \times c_{15;234}(F_1; 234, F_5; 234)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Inaczej wygląda sytuacja w przypadku, gdy zadaniem jest wyznaczenie dekompozycji C-vine. Rysunek 2 ilustruje przykład dekompozycji dla pięciu zmiennych losowych.

W odróżnieniu od dekompozycji D-vine, w dekompozycji C-vine wybierana jest zmienna, która jest korzeniem drzewa. Po ustaleniu korzenia dla drzewa  $T_1$ , łączy się go z pozostałymi wierzchołkami drzewa  $T_1$ , a następnie krawędzie drzewa  $T_1$  etykietuje się w taki sam sposób jak krawędzie drzewa  $T_1$  w dekompozycji D-vine. Krawędzie drzewa  $T_1$  stają się wierzchołkami drzewa  $T_2$ , a z nich wybiera się korzeń dla drzewa  $T_2$ . Korzeń łączy się krawędziami z pozostałymi wierzchołkami drzewa  $T_2$  i nadaje się im etykiety. Etykietą dla krawędzi łączącej korzeń 12 i wierzchołek 13 jest 23; 1, korzeń 12 i wierzchołek 14 – 24; 1, korzeń 12 i wierzchołek 15 – 25; 1. Zmienną warunkującą w drze-

<sup>2</sup> Dla czytelności zapisu zostały pominięte argumenty funkcji.



**Rysunek 2. Pięciowymiarowa dekompozycja C-vine**

Źródło: opracowanie własne.

wie  $T_2$  jest zatem zmienna, która była korzeniem drzewa  $T_1$ . Kontynuując to rozumowanie, dla drzewa  $T_3$  zmiennymi warunkującymi są zmienne, które były w korzeniu drzewa  $T_2$ .

Porządek w drzewie  $T_1$  nie jest jednoznaczny i nie determinuje porządku w kolejnych drzewach. Występuje  $\frac{k!}{2}$  możliwych dekompozycji C-vine (Aas, Czado, Frigessi i Bakkend, 2009, s. 7). Dla każdego drzewa z osobna należy wybrać korzeń.

Aby ustalić korzeń drzewa, wyznacza się następującą macierz:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & |\tau_{1,m}| \\ |\tau_{2,1}| & & |\tau_{2,m}| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |\tau_{m,1}| & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

w której  $|\tau_{i,j}|$  oznacza wartość bezwzględną współczynnika  $\tau$  Kendalla między  $i$ -tą i  $j$ -tą zmienną ( $i, j \in \{1, \dots, m\}, m \leq k$ ).

Następnie obliczana jest suma wartości  $|\tau_{i,j}|$  dla każdej z kolumn, tzn.  $\sum^m |\tau_{i,j}|$  przy ustalonym indeksie  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Korzeniem drzewa zostaje zmieniona reprezentowana przez kolumnę o największej sumie. Indeks tej zmiennej umieszcza się w korzeniu, a pozostałe wierzchołki łączy się za pomocą krawędzi z korzeniem.

Gdy został już wybrany korzeń drzewa  $T_1$ , dla każdej krawędzi drzewa  $T_1$  jest dobierana kopula, którą indeksuje się etykietą danej krawędzi drzewa  $T_1$ . Po dobraniu wszystkich kopuli w drzewie  $T_1$  losowane są z nich obserwacje. Otrzymuje się  $k - 1$  macierzy obserwacji o wymiarach  $n \times 2$  ( $n$  oznacza liczebność próby), z których najpierw wyznacza się korzeń drzewa  $T_2$ . Podobnie jak przy wyborze korzenia dla drzewa  $T_1$  wyznacza się macierz wartości bezwzględnych  $\tau$  Kendalla dla  $k - 1$  zmiennych i wybiera się tę, dla której suma w kolumnie macierzy jest największa. Zmienna ta zostaje korzeniem drzewa  $T_2$ , a pozostałe zmienne umieszcza się na wierzchołkach i łączy krawędziami z korzeniem. Mając wyznaczone drzewo  $T_2$ , dla każdej krawędzi dobiera się kopule warunkowe indeksowane etykietami krawędzi drzewa  $T_2$ . Procedurę tę powtarza się, aż zostanie wyznaczona warunkowa kopula dwuwymiarowa dla dwóch ostatnich wierzchołków.

Dekompozycję C-vine gęstości dla pięciu zmiennych losowych można zapisać jako:

$$\begin{aligned} f = & f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 \times c_{12}(F_1, F_2) c_{13}(F_2, F_3) c_{14}(F_3, F_4) c_{15}(F_4, F_5) \times \\ & \times c_{23;1}(F_{2;1}, F_{3;1}) c_{24;1}(F_{2;1}, F_{4;1}) c_{25;1}(F_{2;1}, F_{5;1}) \times \\ & \times c_{34;12}(F_{3;12}, F_{4;12}) c_{35;12}(F_{3;12}, F_{5;12}) \times c_{15;234}(F_{1;234}, F_{5;234})^3 \end{aligned} \quad (13)$$

Struktura C-vine jest stosowana, jeśli pośród zmiennych losowych, z których budujemy wielowymiarowy rozkład, jedna ze zmiennych losowych wykazuje dużą zależność z pozostałymi zmiennymi losowymi. Natomiast jeśli taka zmienna losowa nie istnieje, wykorzystuje się dekompozycję D-vine.

## 5. Wyniki badań empirycznych

W ustaleniu efektu dywersyfikacji ryzyka ubezpieczyciela kluczowy jest wybór metody wyznaczania wymogu kapitałowego z tytułu łącznego ryzyka.

<sup>3</sup> Dla czytelności zapisu zostały pominięte argumenty funkcji.

Zaproponowana na drugim poziomie agregacji w FS metoda wariancji-kowariancji szacuje wartość BSCR na prawidłowym poziomie, jeśli rozkłady agregowanych modułów ryzyka  $L_i$  mają rozkład normalny, a struktura zależności między nimi jest opisana za pomocą macierzy korelacji. Wartości w macierzy korelacji między modułami ryzyka zostały ustalone i podane w dyrektywie, co dodatkowo ogranicza stosowany model FS. W niniejszych badaniach do modelowania struktury zależności między agregowanymi modułami ryzyka proponujemy wykorzystanie kaskad C-vine i D-vine. Otrzymany efekt dywersyfikacji jest porównany z efektem dywersyfikacji otrzymanym dla FS, możliwymi do otrzymania efektami dywersyfikacji dla macierzy korelacji (w których wartości korelacji należą do przedziału od 0 do 1) oraz przy założeniu braku jakiegokolwiek informacji na temat zależności między modułami ryzyka. Tabela 2 przedstawia arbitralnie założone rozkłady dla modułów ryzyka.

**Tabela 2. Rozkłady dla poszczególnych modułów ryzyka**

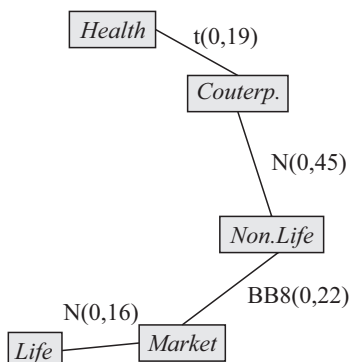
Moduł ryzyka	Rozkład
<i>Market</i>	$L_1 \sim N(0, 116^2)$
<i>Couterp</i>	$L_2 \sim 2.175e05\text{Beta}(0.58, 1954)$
<i>Life</i>	$L_3 \sim N(0, 392^2)$
<i>Health</i>	$L_4 \sim N(0, 248^2)$
<i>Non.Life</i>	$L_5 \sim 200\text{LN}(0, 1)$

Źródło: opracowanie własne.

Dla założonych rozkładów brzegowych w tabeli 2 przyjmujemy, że zależności między nimi opisuje macierz korelacji dana w dyrektywie (tabela 1), i wyznaczamy pięciowymiarową strukturę zależności C-vine i D-vine. Podczas wyznaczania struktury C-vine i D-vine parametry dla kopuli dwuwymiarowych są wybrane metodą największej wiarygodności, a najlepsza kopuła dwuwymiarowa jest wybrana z wykorzystaniem kryterium logarytmu wiarygodności.

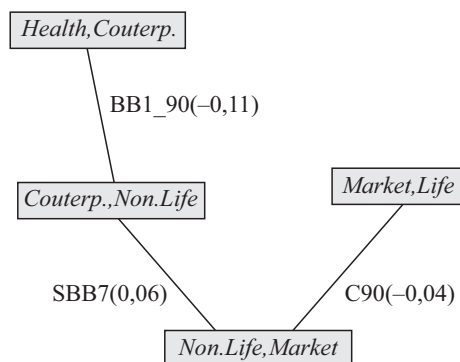
### 5.1. Kaskada D-vine

Problem wyboru porządku w drzewie  $T_1$  jest sprowadzony do problemu komiwojażera. Konstruujemy graf pełny ważony, którego wierzchołkami są zmienne losowe  $L_1, \dots, L_5$  opisujące moduły ryzyka. Następnie do każdej krawędzi łączącej wierzchołki przypisujemy wagi, obliczając  $1 - |\tau_{i,j}|$  dla  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Wyznaczamy najkrótszą drogę zaczynającą się z każdego wierzchołka, a następnie spośród najkrótszych dróg z każdego wierzchołka wybieramy tę najkrótszą. Po wybraniu porządku w drzewie pierwszym modelujemy



Rysunek 3. Drzewo pierwsze D-vine

Źródło: opracowanie własne.

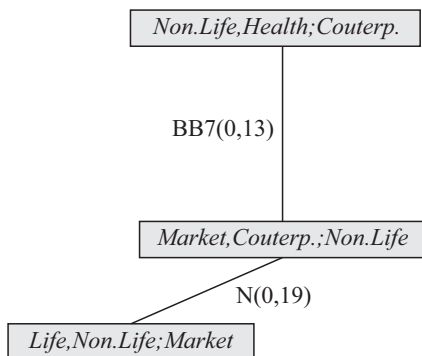


Rysunek 4. Drzewo drugie D-vine

Źródło: opracowanie własne.

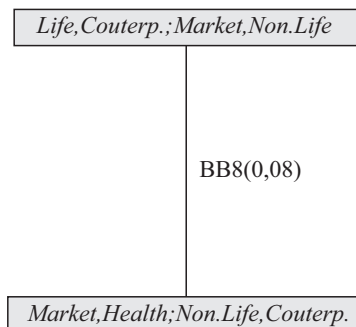
strukturę D-vine, która jest przedstawiona na rysunkach 3–6. Na krawędziach drzew są zapisane dopasowane kopule dwuwymiarowe, a w nawiasach okrągłych wartości współczynnika  $\tau$  Kendalla dla dobranej kopuli. Dopasowane kopule w drzewie pierwszym to: kopuła t-Studenta, BB8-kopuła Joe-Franka, N-kopuła Gaussa. Następnie z wyznaczonych kopuli losuje się obserwacje, które trafiają do wierzchołków drzewa  $T_2$ . Dla każdej krawędzi dobieramy rodziny kopuli: C90-kopuła Clayтона obrócona o  $90^\circ$ , BB1\_90-kopuła Clayтона-Gumbela obrócona o  $90^\circ$ , SBB7-kopuła Joa-Claytona obrócona o  $180^\circ$ .

Rozważając wierzchołki  $Market, Life$  oraz  $Non.Life, Market$  drzewa  $T_2$ , wyznaczamy kopulę warunkową, w której zmienne warunkowane to  $Life$  i  $Non.Life$ , natomiast zmienną warunkującą jest  $Market$ . Następnie z wyznaczonej kopuli warunkowej o etykiecie  $Life, Non.Life; Market$  losujemy obserwacje, które trafiają do wierzchołka w drzewie  $T_3$ . Postępując analogicznie, wyznaczamy obserwacje dla pozostałych wierzchołków drzewa  $T_3$ . Następnie dla każdej kra-



Rysunek 5. Drzewo trzecie D-vine

Źródło: opracowanie własne.



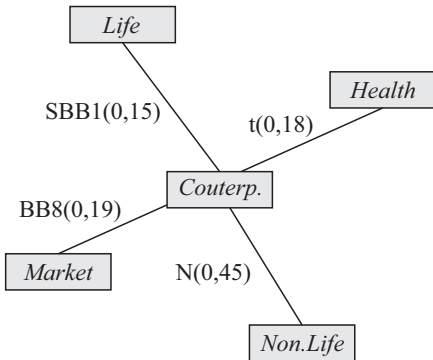
Rysunek 6. Drzewo czwarte D-vine

Źródło: opracowanie własne.

wędzi drzewa  $T_3$  dobieramy kopule warunkowe: N-kopulę Gaussa i BB7-kopulę Joe-Claytona. Kopula, która została wybrana dla krawędzi między wierzchołkami  $Life, Non.Life; Market$  i  $Market, Couterp.; Non.Life$ , to kopula warunkowa, w której zmiennymi warunkującymi są  $Market, Non.Life$ , natomiast zmiennymi warunkowanymi –  $Life, Couterp.$ . Podobnie jest wyznaczana kopula dla drugiej krawędzi. Z dobranych kopuli losujemy obserwacje, które trafiają do wierzchołków drzewa  $T_4$ . W drzewie  $T_4$  dobierana jest kopula warunkowa BB8-kopula Joa-Franka. Zmiennymi warunkującymi w tej kopuli są  $Non.Life, Couterp.$ , natomiast zmiennymi warunkowanymi –  $Market, Life, Health$ .

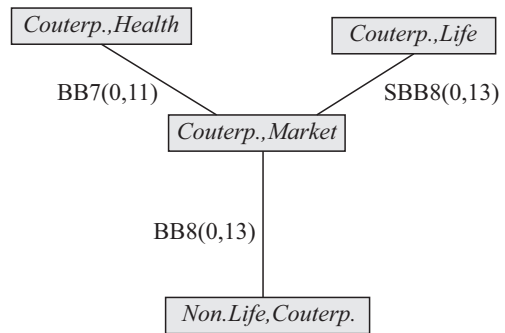
## 5.2. Kaskada C-vine

Następnie dopasowana jest struktura C-vine, w której do wyznaczenia korzenia w drzewie  $T_1$  jest wykorzystana macierz wartości bezwzględnych  $\tau$  Kendalla. Korzeniem w drzewie  $T_1$  jest zmienna  $Couterp.$ , a na krawędziach drzewa umieszczamy dopasowane kopule i wartości współczynnika  $\tau$  Kendalla dla dobranych kopuli. Dopasowane kopule w drzewie  $T_1$  to: t-kopula t-Studenta, SBB1-kopula Claytona-Gumbela obrócona o  $180^\circ$ , BB8-kopula Joa-Franka i N-kopula Gaussa. Następnie z dopasowanych kopuli dla krawędzi drzewa  $T_1$  losujemy obserwacje, z których wyznaczamy macierz wartości bezwzględnych  $\tau$  Kendalla, na podstawie której wybrany jest korzeń drzewa  $T_2$ . W korzeniu



**Rysunek 7. Drzewo pierwsze C-vine**

Źródło: opracowanie własne.

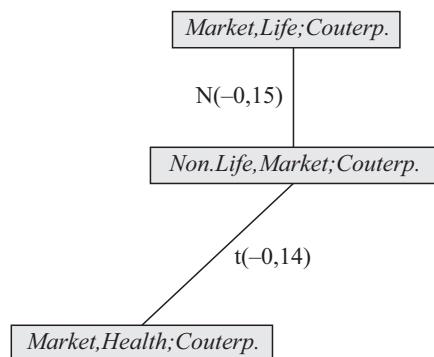


**Rysunek 8. Drzewo drugie C-vine**

Źródło: opracowanie własne.

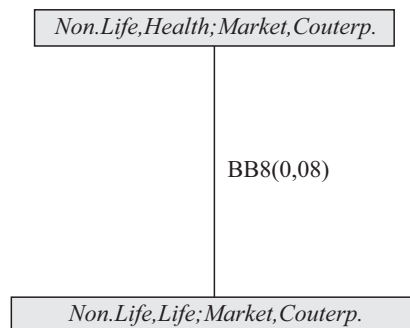
drzewa  $T_2$  są umieszczone obserwacje z kopuli wyznaczonej między modułami  $Couterp.$  i  $Market$ . Następnie dla każdej krawędzi drzewa  $T_2$  są wyznaczone kopule warunkowe: BB7-kopula Joa-Claytona, BB8-kopula Joa-Franka i SBB8-kopula Joa-Franka obrócona o  $180^\circ$ .

Z kopuli wyznaczonych dla krawędzi w drzewie  $T_2$  są wylosowane obserwacje, z których jest wyznaczona macierz bezwzględnych współczynników  $\tau$  Kendalla i na jej podstawie jest wybrany korzeń dla drzewa  $T_3$ . Korzeniem jest



**Rysunek 9. Drzewo trzecie C-vine**

Źródło: opracowanie własne.



**Rysunek 10. Drzewo czwarte C-vine**

Źródło: opracowanie własne.

kopula warunkowa  $Non.Life,Market;Couterp.$  Dla każdej krawędzi drzewa  $T_3$  są wyznaczone kopule warunkowe: N-kopula Gaussa i t-kopula t-Studenta. Następnie z tych kopuli są wylosowane obserwacje, które trafiają do wierzchołków drzewa  $T_4$ . Wierzchołki drzewa  $T_4$  są połączone krawędzią, dla której wyznaczamy warunkową kopulę dwuparametryczną, kopulę BB8-Joa-Franka.

Po wyznaczeniu gęstości dla kaskad C-vine i D-vine wyznaczana jest wartość BSCR oraz efekt dywersyfikacji.

### 5.3. BSCR i efekt dywersyfikacji

Dla założonych zmiennych losowych w tabeli 2 wyznaczono wartości BSCR i efektu dywersyfikacji:

1. Za pomocą formuły standardowej:
  - zakładając macierz korelacji daną przez twórców dyrektywy,
  - zakładając niezależność między zmiennymi losowymi opisującymi moduły ryzyka (wartości korelacji między wszystkimi modułami ryzyka są równe 0),
  - zakładając pełną zależność liniową między zmiennymi losowymi opisującymi moduły ryzyka (wartości korelacji pomiędzy wszystkimi modułami ryzyka są równe 1).
2. Przy założeniu braku informacji na temat zależności. W tym przypadku wyznaczono przedziały, zgodnie ze wzorem (7) z wykorzystaniem algorytmu ARA.
3. Wyznaczając strukturę zależności za pomocą C-vine i D-vine.



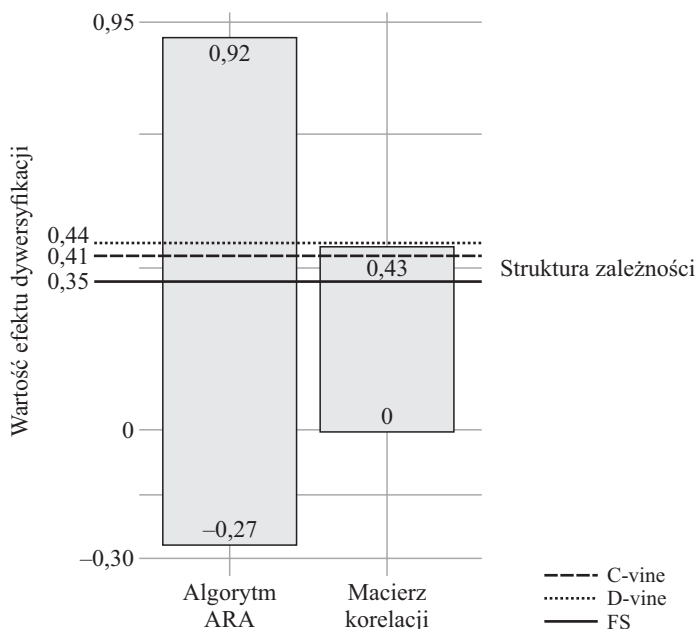
**Tabela 3. Wartości BSCR i efektu dywersyfikacji dla założonych zmiennych losowych**

Struktura zależności	BSCR (w mln USD)	Efekt dywersyfikacji
Formuła standardowa	3032	0,35
Niezależność liniowa zmiennych $L_i$	2640	0,43
Pełna zależność liniowa zmiennych $L_i$	4650	0
$\overline{VaR_\alpha(L)}$	364	-0,27
$\overline{VaR_\alpha(L)}$	5913	0,92
C-vine	2750	0,41
D-vine	2627	0,44

Źródło: opracowanie własne.

Otrzymane wyniki prezentuje tabela 3.

Zakładając, że  $L_1, \dots, L_5$  mają wielowymiarowy rozkład normalny, a zależności między rozkładami brzegowymi  $L_i$  są opisane w macierzy korelacji danej przez twórców dyrektywy (tabela 1), BSCR jest wyznaczony zgodnie ze wzorem (3). Otrzymany BSCR wynosi 3032 mln USD, a efekt dywersyfikacji jest równy 0,35. Dalej wyznaczany jest przedział możliwych BSCR



**Rysunek 11. Efekt dywersyfikacji dla różnych struktur zależności**

Źródło: opracowanie własne.

w zależności od wyboru macierzy korelacji. W badaniu rozpatrujemy macierze, w których wartości korelacji należą do przedziału od 0 do 1. W zależności od wyboru macierzy korelacji wartości BSCR mieszczą się w przedziale od 2640 mln do 4650 mln USD, co przekłada się na efekt dywersyfikacji w przedziale od 0 do 0,43. Z uwagi na to, że macierz korelacji uwzględnia jedynie zależności o charakterze liniowym, przyjmujemy założenie o braku jakichkolwiek informacji odnośnie do struktury zależności między modułami ryzyka, a do wyznaczenia BSCR wykorzystujemy algorytm ARA. BSCR znajduje się w przedziale od 364 mln do 5913 mln USD, co przekłada się na efekt dywersyfikacji w przedziale od  $-0,27$  do  $0,92$ . Przy wykorzystaniu do wyznaczenia struktury zależności kaskady kopuli C-vine BSCR jest na poziomie 2750 mln USD, co przekłada się na efekt dywersyfikacji na poziomie  $0,41$ , a przy wyborze do opisu struktury zależności kaskady D-vine BSCR jest równy 2627 mln USD i efekt dywersyfikacji jest na poziomie  $0,44$ . Wyniki są zobrazowane na rysunku 11. Efekt dywersyfikacji otrzymany przy użyciu FS jest w połowie możliwych do osiągnięcia efektów dywersyfikacji, jeśli uwzględnimy wybór zależności między modułami ryzyka ubezpieczyciela. Należy przy tym zaznaczyć, że otrzymany efekt dywersyfikacji dla zależności modelowanej za pomocą kaskady kopuli D-vine nie mieści się w przedziale możliwych efektów dywersyfikacji otrzymanych przy uwzględnieniu jedynie zależności liniowych. Różnica między efektem dywersyfikacji otrzymanym dla FS a efektem dywersyfikacji otrzymanym dla kaskady D-vine wynosi 9 punktów procentowych.

## Podsumowanie

W artykule zaprezentowano wykorzystanie kaskad kopuli do modelowania zależności między modułami ryzyka ubezpieczyciela, zarówno od strony metodologicznej, jak i empirycznej. Przyjęto arbitralnie rozkłady dla modułów ryzyka i wyznaczono przedział możliwych do otrzymania BSCR, zakładając, że zależności między modułami ryzyka są opisane korelacją liniową. Korzystając z algorytmu ARA, wyznaczono przedział możliwych do otrzymania BSCR, przy założeniu braku jakichkolwiek informacji na temat struktury zależności. Wykorzystując kaskady D-vine, otrzymano wartość efektu dywersyfikacji spoza przedziału możliwych do otrzymania efektów dywersyfikacji dla liniowej struktury zależności.

Z przeprowadzonych badań wynika, że efekt dywersyfikacji ryzyka ubezpieczyciela zależy głównie od właściwie zidentyfikowanej struktury zależności między agregowanymi modułami ryzyka. Wykorzystanie w formule standardo-

wej korelacji liniowej jest niewystarczające, ponieważ opisuje jedynie zależności liniowe między modułami ryzyka ubezpieczyciela, które – jak pokazują przeprowadzone badania – w rzeczywistości mogą być znacznie inne. Twórcy dyrektywy zachęcają zakłady ubezpieczeń do tworzenia częściowych lub pełnych modeli wewnętrznych, które dokładniej odzwierciedlą profil ubezpieczyciela.

Przeprowadzone badania pokazują, że do modelowania struktury zależności między modułami ryzyka w modelach wewnętrznych odpowiednim narzędziem są kaskady kopuli.

## Bibliografia

- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A. i Bakkend H. (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), 182–198. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.02.001>
- Bedford, T. i Cooke, R. M. (2002). Vines – A new graphical model for dependent random variables. *Annals of Statistics*, 30(4), 1031–1068. <https://doi.org/10.1214/aos/1031689016>
- Berg, D. i Aas, K. (2009). Models for construction of multivariate dependence: A comparison study. *European Journal of Finance*, 15(7–8), 639–659. <https://doi.org/10.1080/13518470802588767>
- Bermúdez, L., Ferri, A. i Guillén, M. (2013). A correlation sensitivity analysis of non-life underwriting risk in solvency capital requirement estimation. *ASTIN Bulletin*, 43(1), 21–37. <https://doi.org/10.1017/asb.2012.1>
- Bernard, C. i Vanduffel, S. (2015). *Risk aggregation and diversification*, 12–13. Pobrane z <http://belkcollege.uncc.edu/sites/belkcollege.uncc.edu/files/media/RiskAggregationandDiversification.pdf>
- Czado, C. (2019). *Analyzing dependent data with vine copulas: A practical guide with R, Lecture Notes in Statistics*. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-13785-4\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-13785-4_1)
- Dyrektywa Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II) (wersja przekształcona) (Dz. Urz. UE L 335/1 z 17.12.2009).
- EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority). (2011). *EIOPA report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II*. Pobrane z [https://register.eiopa.europa.eu/Publications/Reports/QIS5\\_Report\\_Final.pdf](https://register.eiopa.europa.eu/Publications/Reports/QIS5_Report_Final.pdf)
- Embrechts, P., Puccetti, G. i Rüschendorf, L. (2013). Model uncertainty and VaR aggregation. *Journal of Banking and Finance*, 37(8), 2750–2764. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2013.03.014>
- Embrechts, P., Wang, B. i Wang, R. (2015). Aggregation-robustness and model uncertainty of regulatory risk measures. *Finance and Stochastics*, 19(4), 763–790. <https://doi.org/10.1007/s00780-015-0273-z>

- Hofert, M., Memartoluie, A., Saunders, D., Wirjanto, T. (2015). *Improved algorithms for computing worst value-at-risk: Numerical challenges and the adaptive rearrangement algorithm*. Pobrane z <http://arxiv.org/abs/1505.02281>
- Liu, J., Wang, M. i Sriboonchitta, S. (2019). Examining the interdependence between the exchange rates of China and ASEAN countries: A canonical vine copula approach. *Sustainability (Switzerland)*, 11(19), 5487, 1–20. <https://doi.org/10.3390/su11195487>
- Rozporządzenie delegowane Komisji (UE) 2015/35 z dnia 10 października 2014 r. uzupełniające dyrektywę Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wyłączalność II) (Dz. Urz. UE L 12/1 z 17.01.2015).
- Sklar, A. (1959). *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*. Vol. 8. Paris: Institut Statistique de l'Université de Paris, 229–231.
- Wanat, S. (2014). Ocena efektu dywersyfikacji ryzyka w Solwency II – aspekty metodyczny i praktyczny. *Wiadomości Ubezpieczeniowe*, (3), 115–132.
- Wanat, S. i Konieczny, R. (2017). Estimation of the diversification effect in solvency ii under dependence uncertainty. *Financial Sciences*, 4(33), 89–104. <https://doi.org/10.15611/nof.2017.4.07>